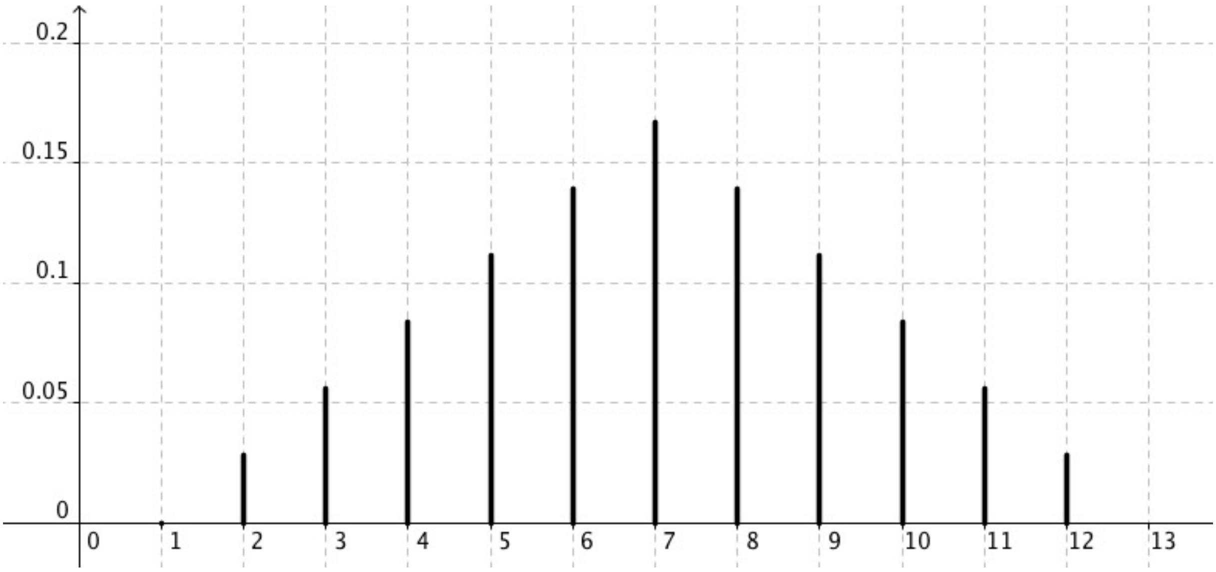
PRÄSENZÜBUNGEN

1.

Werte für X, k =	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P(X=k)	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$



$$E(X)=2\cdot\frac{1}{36}+3\cdot\frac{2}{36}+4\cdot\frac{3}{36}+5\cdot\frac{4}{36}+6\cdot\frac{5}{36}+7\cdot\frac{6}{36}+8\cdot\frac{5}{36}+9\cdot\frac{4}{36}+10\cdot\frac{3}{36}+11\cdot\frac{2}{36}+12\cdot\frac{1}{36}$$

$$=\frac{1}{36}(2+6+12+20+30+42+40+36+30+22+12)=\frac{252}{36}=7$$

Da die Verteilung symmetrisch ist zum mittleren Wert 7, ist der Erwartungswert gerade dieser mittlere Wert.

$$V(X)=(2-7)^2\cdot\frac{1}{36}+(3-7)^2\cdot\frac{2}{36}+(4-7)^2\cdot\frac{3}{36}+(5-7)^2\cdot\frac{4}{36}+(6-7)^2\cdot\frac{5}{36}+(7-7)^2\cdot\frac{6}{36}$$

$$+(8-7)^2\cdot\frac{5}{36}+(9-7)^2\cdot\frac{4}{36}+(10-7)^2\cdot\frac{3}{36}+(11-7)^2\cdot\frac{2}{36}+(12-7)^2\cdot\frac{1}{36}$$

$$=\frac{1}{36}(25\cdot1+16\cdot2+9\cdot3+4\cdot4+1\cdot5+0\cdot6+1\cdot5+4\cdot4+9\cdot3+16\cdot2+25\cdot1)$$

$$=\frac{210}{36}=\frac{35}{6}$$

$$\sigma_X=\sqrt{V(X)}\approx2{,}42$$

Dann ist $\mu_X-\sigma_X\approx7-2{,}42=4{,}58$ und $\mu_X+\sigma_X\approx7+2{,}42=9{,}42$. Also liegen im Intervall $\left[\mu_X-\sigma_X;\mu_X+\sigma_X\right]$ die Werte k = 5, 6, 7, 8, 9. Die Summe der zugehörigen W' ist $\frac{1}{36}\cdot(4+5+6+5+4)=\frac{24}{36}=\frac{2}{3}$.

2. Ein erstes Probieren mit Werten n= 2, 3, 4, 5 legt nahe, dass man für die allgemeine Betrachtung die Fälle *n* gerade und *n* ungerade unterscheidet.

In beiden Fällen gilt: Ziehen ohne Zurücklegen und ohne B. d. R., also $|\Omega| = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n-1)$

<u>*n* gerade</u>
Der kleinste Wert *k* ist 3 = 1+2, der größte Wert ist $n + (n-1) = 2n - 1$.
Die mittleren Werte kann man erzielen durch

$n = 1 + (n-1) = 2 + (n-2) = 3 + (n-3) = \ldots = \left(\frac{n}{2}-1\right) + \left(\frac{n}{2}+1\right)$, das sind $\frac{n}{2}-1$ Möglichkeiten

$n+1 = 1 + n = 2 + (n-1) = 3 + (n-2) = \ldots = \left(\frac{n}{2}\right) + \left(\frac{n}{2}+1\right)$, das sind $\frac{n}{2}$ Möglichkeiten

$n+2 = 2 + n = 3 + (n-1) = \ldots = \left(\frac{n}{2}\right) + \left(\frac{n}{2}+2\right)$, das sind $\frac{n}{2}-1$ Möglichkeiten

Also haben wir die Verteilung

Werte für X, k =	3	4	5	...	n	n+1	n+2	...	2n-3	2n-2	2n-1
$P(X=k)$	$\frac{1}{\lvert\Omega\rvert}$	$\frac{1}{\lvert\Omega\rvert}$	$\frac{2}{\lvert\Omega\rvert}$	...	$\frac{\frac{n}{2}-1}{\lvert\Omega\rvert}$	$\frac{\frac{n}{2}}{\lvert\Omega\rvert}$	$\frac{\frac{n}{2}-1}{\lvert\Omega\rvert}$	...	$\frac{2}{\lvert\Omega\rvert}$	$\frac{1}{\lvert\Omega\rvert}$	$\frac{1}{\lvert\Omega\rvert}$

Die W'verteilung ist symmetrisch, folglich ist der Erwartungswert der mittlere Wert.
$E(X) = n+1$

<u>*n* ungerade</u>
Der kleinste Wert *k* ist 3 = 1+2, der größte Wert ist $n + (n-1) = 2n - 1$.
Die mittleren Werte kann man erzielen durch

$n = 1 + (n-1) = 2 + (n-2) = 3 + (n-3) = \ldots = \left(\frac{n-1}{2}\right) + \left(\frac{n+1}{2}\right)$, das sind $\frac{n-1}{2}$ Möglichkeiten

$n+1 = 1 + n = 2 + (n-1) = 3 + (n-2) = \ldots = \left(\frac{n-1}{2}\right) + \left(\frac{n+3}{2}\right)$, das sind $\frac{n-1}{2}$ Möglichkeiten

$n+2 = 2 + n = 3 + (n-1) = \ldots = \left(\frac{n+1}{2}\right) + \left(\frac{n+3}{2}\right)$, das sind $\frac{n-1}{2}$ Möglichkeiten

Also haben wir die Verteilung

Werte für X, k =	3	4	5	...	n	n+1	n+2	...	2n-3	2n-2	2n-1
$P(X=k)$	$\frac{1}{\lvert\Omega\rvert}$	$\frac{1}{\lvert\Omega\rvert}$	$\frac{2}{\lvert\Omega\rvert}$	...	$\frac{\frac{n-1}{2}}{\lvert\Omega\rvert}$	$\frac{\frac{n-1}{2}}{\lvert\Omega\rvert}$	$\frac{\frac{n-1}{2}}{\lvert\Omega\rvert}$	...	$\frac{2}{\lvert\Omega\rvert}$	$\frac{1}{\lvert\Omega\rvert}$	$\frac{1}{\lvert\Omega\rvert}$

Die W'verteilung ist symmetrisch, folglich ist der Erwartungswert der mittlere Wert.
$E(X) = n+1$

HAUSÜBUNGEN

3. Tabelle für n = 12 und p = 0,167

k	P(X=k)	kumuli...		1	2	3	4	5	6	7	8	9	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
0	0.1116	0.1116	..	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X											
1	0.2685	0.3801	..	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
2	0.2961	0.6762	..	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
3	0.1979	0.8741	..	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X			
4	0.0893	0.9634	..	X	X	X	X	X	X	X	X														
5	0.0286	0.992	..	X	X																				
6	0.0067	0.9987	..																						
7	0.0012	0.9998	..																						
8	0.0001	1	..																						
9	0	1	..																						
10	0	1	..																						
11	0	1	..																						
12	0	1	..																						

<table>
<tr><td colspan="14">S = 2</td></tr>
<tr><td>X</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td></tr>
<tr><td>A</td><td colspan="2">0</td><td>4</td><td colspan="10">4</td></tr>
<tr><td>P(A=...)</td><td colspan="2">0,3801</td><td>0,2961</td><td colspan="10">1 – 0,6762 = 0,3238</td></tr>
</table>

$E(A)$ = 0·0,3801 + 4·0,2961 + 4·0,3238 = 2,4769 (0,5 Punkte)

<table>
<tr><td colspan="14">S = 3</td></tr>
<tr><td>X</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td></tr>
<tr><td>A</td><td colspan="3">0</td><td>9</td><td colspan="9">6</td></tr>
<tr><td>P(A=...)</td><td colspan="3">0,6762</td><td>0,1979</td><td colspan="9">1 – 0,8741 = 0,1259</td></tr>
</table>

$E(A)$ = 0·0,6762 + 9·0,1979 + 6·0,1259 = 2,5365 (0,5 Punkte)

<table>
<tr><td colspan="14">S = 4</td></tr>
<tr><td>X</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td></tr>
<tr><td>A</td><td colspan="4">0</td><td>16</td><td colspan="8">8</td></tr>
<tr><td>P(A=...)</td><td colspan="4">0,8741</td><td>0,0893</td><td colspan="8">1 – 0,9634 = 0,0366</td></tr>
</table>

$E(A)$ = 0·0,8741 + 16·0,0893 + 6·0,0366 = 1,7216 (0,5 Punkte)

<table>
<tr><td colspan="14">S = 5</td></tr>
<tr><td>X</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td></tr>
<tr><td>A</td><td colspan="5">0</td><td>25</td><td colspan="7">10</td></tr>
<tr><td>P(A=...)</td><td colspan="5">0, 9634</td><td>0,0286</td><td colspan="7">1 – 0,9920 = 0,0080</td></tr>
</table>

$E(A)$ = 0·0,9634 + 25·0,0286 + 10·0,0080 = 0,7950 (0,5 Punkte)

Nahe liegend wäre eine Schätzung von $S = 2 = 12 \cdot \frac{1}{6}$. Das liefert auch keinen schlechten Erwartungswert. Eine Schätzung von 3 Sechsen ist aber für dieses Spiel die günstigste Strategie, da dabei der höchste Erwartungswert erreicht wird. Man erhält zwar nichts in

etwa zwei Drittel aller Spiele. Dafür ist die Auszahlung beim Gewinn aber entsprechend höher als wenn man S = 2 wählt.
Für größere S wirkt sich die immer größer werdende W' für die Auszahlung Null negativ aus. (1 Punkt)

4. a. n = 10, p = 0,4 $\mu = np = 4$, $\sigma = \sqrt{np(1-p)} \approx 1{,}55$, $\mu - \sigma \approx 2{,}45$, $\mu + \sigma \approx 5{,}55$

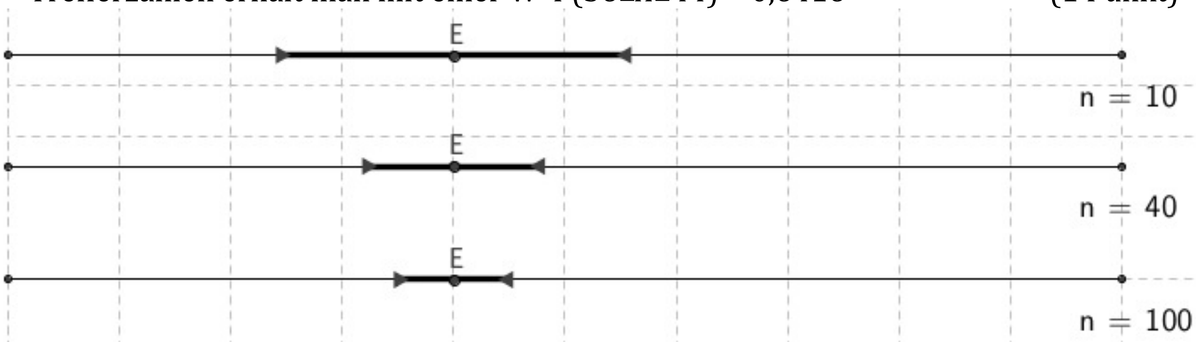
Dann liegen die Trefferzahlen k = 3, 4, 5 in der σ-Umgebung um μ. Diese Trefferzahlen erhält man mit einer W' P(3≤X≤5) ≈ 0,6666 (1 Punkt)

b. n = 40, p = 0,4 $\mu = np = 16$, $\sigma = \sqrt{np(1-p)} \approx 3{,}10$, $\mu - \sigma \approx 12{,}90$, $\mu + \sigma \approx 19{,}10$

Dann liegen die Trefferzahlen k = 13, 14, ..., 19 in der σ-Umgebung um μ. Diese Trefferzahlen erhält man mit einer W' P(13≤X≤19) ≈ 0,7417 (1 Punkt)

c. n = 100, p = 0,4 $\mu = np = 40$, $\sigma = \sqrt{np(1-p)} \approx 4{,}90$, $\mu - \sigma \approx 35{,}10$, $\mu + \sigma \approx 44{,}90$

Dann liegen die Trefferzahlen k = 36, 37, ..., 44 in der σ-Umgebung um μ. Diese Trefferzahlen erhält man mit einer W' P(36≤X≤44) ≈ 0,6416 (1 Punkt)



Die σ-Umgebung um μ wird relativ zur Gesamtlänge des Intervalls aller Treffermöglichkeiten n immer schmaler. (1 Punkt)

5.

a) 2% Zinsen: 50.000 · 1,02 = 51.000
Da die Zahlung sicher ist, ist der Erwartungswert auch 51.000 1

b) 50.000 —0,9→ +8% → 54.000
50.000 —0,1→ −50% → 25.000

E(Geld)
= 54.000 · 0,9
+ 25.000 · 0,1
= 51.100 1

c) 0 Flops $\quad 50.000 \cdot 1{,}08 = 54.000$

$P(0\text{ Flops}) = 0{,}9^5 \approx 0{,}5905$

1 Flop $\quad \left.\begin{array}{l} 40.000 \cdot 1{,}08 = 43.200 \\ 10.000 \cdot 0{,}5 = 5.000 \end{array}\right\} 48.200$

$P(1\text{ Flop}) \approx 0{,}3281$

2 Flops $\quad \left.\begin{array}{l} 30.000 \cdot 1{,}08 = 32.400 \\ 20.000 \cdot 0{,}5 = 10.000 \end{array}\right\} 42.400$

$P(2\text{ Flops}) \approx 0{,}0729$

3 Flops $\quad \left.\begin{array}{l} 20.000 \cdot 1{,}08 = 21.600 \\ 30.000 \cdot 0{,}5 = 15.000 \end{array}\right\} 36.600$

$P(3\text{ Flops}) \approx 0{,}0081$

4 Flops $\quad \left.\begin{array}{l} 10.000 \cdot 1{,}08 = 10.800 \\ 40.000 \cdot 0{,}5 = 20.000 \end{array}\right\} 30.800$

$P(4\text{ Flops}) \approx 0{,}0005$

5 Flops laut Tabelle W' ist 0
(tatsächlich $0{,}1^5 = 0{,}00001$)

$$E(\text{Geld}) \approx 54.000 \cdot 0{,}5905 + 48.200 \cdot 0{,}3281 + 42.400 \cdot 0{,}0729 + 36.600 \cdot 0{,}0081 + 30.800 \cdot 0{,}0005$$
$$\approx 51.104$$ (ohne Rundungsfehler genau 51.100)

3

Vorteil: Die W' für einen großen Verlust ist sehr klein. In b. sind es 10%

Nachteil: Die W', dass man einen Verlust erleidet, ist immerhin 40%.

b. und c. unterscheiden sich vom Erwartungswert nicht.