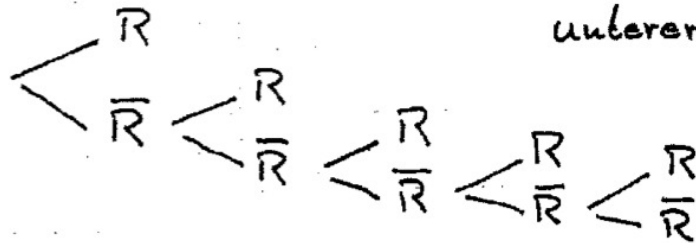


PRÄSENZÜBUNGEN

1.

a)



obere Zweig immer $\frac{1}{6}$
 unterer " " $\frac{5}{6}$

b)

Ergeb.	R	$\bar{R}R$	$\bar{R}\bar{R}R$	$\bar{R}\bar{R}\bar{R}R$	$\bar{R}\bar{R}\bar{R}\bar{R}R$	$\bar{R}\bar{R}\bar{R}\bar{R}\bar{R}$
invest. Geld (in €)	1	2	3	4	5	5
W'	$\frac{1}{6} \approx 16,7\%$	$\frac{5}{36} \approx 13,9\%$	$\frac{5^2}{6^3} \approx 11,6\%$	$\frac{5^3}{6^4} \approx 9,6\%$	$\frac{5^4}{6^5} \approx 8,0\%$	$\frac{5^5}{6^5} \approx 40,2\%$

c) Die Zufallsvariable X gibt die Menge Geld in Euro an, die man jeweils gezahlt hat. Das ist die Zahl in der zweiten Zeile der obigen Tabelle. Dann ist

$$\begin{aligned}
 E(X) &= 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{5}{6^2} + 3 \cdot \frac{5^2}{6^3} + 4 \cdot \frac{5^3}{6^4} + 5 \cdot \frac{5^4}{6^5} + 5 \cdot \frac{5^5}{6^5} \\
 &= \frac{1}{6^5} (6^4 + 10 \cdot 6^3 + 75 \cdot 6^2 + 4 \cdot 125 \cdot 6 + 6 \cdot 5^5) \\
 &= \frac{27906}{7776} = \frac{4651}{1296} \approx 3,59
 \end{aligned}$$

Man muss im Schnitt 3,59 € ausgeben, um auf diese Weise an die Rose zu kommen.

d) Man kann der Tabelle in der letzten Spalte entnehmen, dass die W' für fünf Fehlversuche ca. 40% beträgt.

10. Übung Lösungen

2

HAUSÜBUNGEN

3. i. falsch Es ist anders herum: Ein Ereignis ist eine Menge von Ergebnissen.

ii. richtig

iii. falsch Es ist anders herum: Ω ist ein Element des Ereignisraums.iv. falsch Ω ist ein Element des Ereignisraums.

v. richtig

vi. falsch, siehe v.

(2 Punkte)

4.

Ergebnis (Mü,Wü)	(0,1)	(0,2)	(0,3) (2,1)	(0,4) (2,2)	(0,5) (2,3)	(0,6) (2,4)	(2,5)	(2,6)
Summe	1	2	3	4	5	6	7	8
Wahrsch.	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$

Dann ist

$$E(X) = \frac{1}{12} \cdot (1+2+7+8) + \frac{1}{6} \cdot (3+4+5+6)$$

$$= \frac{18}{12} + \frac{18}{6} = 4,5$$

Dieses Ergebnis ist naheliegend, da die Verteilung symmetrisch ist.

(1 Punkt)

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$= \frac{1}{12} \cdot (1+4+49+64) + \frac{1}{6} \cdot (9+16+25+36) - 4,5^2$$

$$= \frac{118}{12} + \frac{86}{6} - 20,25 \approx 3,92$$

$$\text{Dann ist } \sigma_X = \sqrt{V(X)} \approx 1,98$$

(1 Punkt)

Dann ist die 2σ -Umgebung um den Erwartungswert

$$[E(X) - 2\sigma; E(X) + 2\sigma] \approx [0,54; 8,46]. \text{ Dieses umfasst aber alle möglichen Fälle, also}$$

trifft man dieses Intervall mit 100% Sicherheit.

(1 Punkt)

5. a. $n = 87$, $p = 0,275$, $P(X=21) \approx 0,0772$

(0,5 Punkte)

b. $n = 33$, $p = 0,13$, $P(X=3) \approx 0,1838$

zu Fuß:

$$P(X=3) = \binom{33}{3} \cdot 0,13^3 \cdot 0,87^{30} \approx \frac{33 \cdot 32 \cdot 31}{6} \cdot 0,002197 \cdot 0,015331$$

(0,5 Punkte)

$$\approx 0,183773$$

c. $n = 53$, $p = 0,62$, $P(X=30) + P(X=31) + P(X=32) + P(X=33) + P(X=34) + P(X=35)$

$$\approx 0,0797 + 0,0965 + 0,1082 + 0,1124 + 0,1079 + 0,0955 = 0,6002$$

(0,5 Punkte)

10. Übung Lösungen

3

d. $n = 172$, $p = 0,71$,

$$P(118 \leq X \leq 135) = P(X \leq 135) - P(X \leq 117)$$

$$\approx 0,9894 - 0,2174 = 0,772$$

(0,5 Punkte)

e. $n = 80$, $p = 0,44$ Berechnung von $E(X)$ und σ :

$$E(X) = np = 35,2$$

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{80 \cdot 0,44 \cdot 0,56} \approx 4,44$$

Dann ist $E(X) - \sigma \approx 30,76$ und $E(X) + \sigma \approx 39,64$

Folglich wird gefragt nach

$$P(31 \leq X \leq 39) \approx 0,8337 - 0,1447 = 0,689$$

(1 Punkt)

f. Die Fragestellung macht klar, dass n gesucht ist.

Wir können also n nicht fest einstellen, sondern müssen letztlich mit dem Regler für n „spielen“, bis wir die richtige Einstellung haben. Fest vorgegeben ist $p = 0,63$. Mindestens 12 Treffer bedeutet $X \geq 12$. Über die kumulierte W' können wir aber immer nur $X \leq \dots$ ablesen. Also formen wir in die Gegenw' um:

$$P(X \geq 12) \geq 0,98 \Leftrightarrow P(X \leq 11) < 0,02$$

Das ist die Frage: Wie viele Versuche muss man machen, damit die W' für höchstens (nur) 11 Treffer kleiner ist als $0,02 = 2\%$. Wir müssen also auf das markierte Feld achten.

Beim Spielen mit n stellen wir fest, dass mit wachsendem n der Wert in der Zelle kleiner wird. Also muss man nur noch n so erhöhen, dass der Wert in der Zelle zum ersten Mal unter $0,02$ liegt. Das ist bei $n = 27$ der Fall.

(1 Punkt)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
116	114	0.026	0.1014	..	X	X					
117	115	0.0321	0.1335	..	X	X	X				
118	116	0.0386	0.1721	..	X	X	X				
119	117	0.045	0.2174	..	X	X	X	X			
120	118	0.0517	0.2691	..	X	X	X	X	X		
121	119	0.0574	0.3265	..	X	X	X	X	X	X	
122	120	0.0621	0.3886	..	X	X	X	X	X	X	X
123	121	0.0653	0.4539	..	X	X	X	X	X	X	X
124	122	0.0669	0.5208	..	X	X	X	X	X	X	X
125	123	0.0665	0.5873	..	X	X	X	X	X	X	X
126	124	0.0644	0.6517	..	X	X	X	X	X	X	X
127	125	0.0605	0.7122	..	X	X	X	X	X	X	X
128	126	0.0553	0.7674	..	X	X	X	X	X	X	X
129	127	0.049	0.8164	..	X	X	X	X			
130	128	0.0422	0.8586	..	X	X	X	X			
131	129	0.0352	0.8939	..	X	X	X				
132	130	0.0285	0.9224	..	X	X					
133	131	0.0224	0.9448	..	X	X					
134	132	0.017	0.9618	..	X						
135	133	0.0125	0.9743	..	X						
136	134	0.0089	0.9833	..							
137	135	0.006	0.9894	..							
138	136	0.0041	0.9935	..							
139	137	0.0026	0.9962	..							

 $n = 172$ $p = 0.71$

7	5	0	0	..							
8	6	0	0	..							
9	7	0.0001	0.0001	..							
10	8	0.0003	0.0004	..							
11	9	0.0012	0.0017	..							
12	10	0.0038	0.0055	..							
13	11	0.01	0.0155	..							
14	12	0.0227	0.0361	..	X	X					
15	13	0.0445	0.0826	..	X	X	X	X			
16	14	0.0758	0.1584	..	X	X	X	X	X		
17	15	0.1119	0.2703	..	X	X	X	X	X	X	

 $n = 27$ $p = 0.63$

6. a. (1) ist die Definition des Erwartungswertes für Y , das die Werte $k_i - c$ annehmen kann.

(1) $\rightarrow$ (2): Auflösen der Klammer und verteilen des Summenzeichens auf die Teilterme

(2) $\rightarrow$ (3): Da Y und X die gleiche W' verteilung haben, darf man die W' ersetzen. In der zweiten Summe wurde das konstante c ausgeklammert.

(3) $\rightarrow$ (4): Die erste Summe ist die Definition für $E(X)$. Die zweite Summe ist als Summe über alle W' gleich 1.

(1 Punkt)

b. (1) ist die Berechnung der Varianz mit der 2. Formel.

(1) $\rightarrow$ (2): Die erste Summe ist die Definition des Erwartungswertes für Y^2

(2) $\rightarrow$ (3): Die Klammer wird mit der binomischen Formel aufgelöst und die Summenzeichen auf die Teilterme verteilt.

(3) $\rightarrow$ (4): Da Y und X die gleiche W' verteilung haben, darf man die W' ersetzen.

(4) $\rightarrow$ (5): In der zweiten und dritten Summe wurden die konstanten Faktoren ausgeklammert.

(5) $\rightarrow$ (6): Die erste Summe ist die Definition des Erwartungswertes für X^2 , die zweite Summe ist die Definition für $E(X)$. Die dritte Summe ist als Summe über alle W' gleich 1. Im vierten Teilterm wurde der Erwartungswert von Y durch den von X ersetzt, so wie in a. bereits bewiesen.

(6) $\rightarrow$ (7): Die Klammer am Ende wird mit der binomischen Formel aufgelöst.

10. Übung Lösungen

4

(7) $\rightarrow$ (8): Die eckige Klammer wird aufgelöst. Dann heben sich die entsprechenden Teilterme vorn und hinten weg.

(8) $\rightarrow$ (9): (8) ist die Berechnung der Varianz von X nach der 2. Formel. (3 Punkte)

c. Bei der Wartezeitverteilung mit der Trefferw' p hatten wir zwei Betrachtungen:

Die Zufallsvariable X gibt an, wie viele Gesamtversuche man gemacht hatte bis zum

ersten Treffer. Für X gilt: $E(X) = \frac{1}{p}$ und $V(X) = \frac{1}{p^2}(1-p)$

Die Zufallsvariable Y gibt an, wie viele Fehlversuche man gemacht hat bis zum ersten

Treffer. Es gilt also $Y = X - 1$. Dann ist nach a $E(Y) = \frac{1}{p} - 1$ und nach b $V(Y) = \frac{1}{p^2}(1-p)$.

(1 Punkt)