PPRÄSENZÜBUNGEN

1. Berechnung von p_6: 0,3 + 0,2 + 0,1 + 0,2 + 0,1 + p_6 = 1
   ergibt $p_6 = 0{,}1$
   Dann gilt für den Erwartungswert
   $E(X) = -5\cdot0{,}3 + (-1)\cdot0{,}2 + 2\cdot0{,}1 + 4\cdot0{,}2 + 6\cdot0{,}1 + k_6\cdot0{,}1 = 0$
   ergibt $-0{,}1 + k_6\cdot0{,}1 = 0$ und damit $k_6 = 1$
   Berechnung der Varianz. Da $E(X) = 0$ gilt hier $V(X) = E(X^2)$
   $V(X) = 25\cdot0{,}3 + 1\cdot0{,}2 + 4\cdot0{,}1 + 16\cdot0{,}2 + 36\cdot0{,}1 + 1\cdot0{,}1$
   $= 7{,}5 + 0{,}2 + 0{,}4 + 3{,}2 + 3{,}6 + 0{,}1 \underline{\underline{= 15}}$
   $\sigma_X = \sqrt{15} \approx 3{,}87$
   Dann ist die σ–Umgebung von $E(X)$: $\left[-3{,}87;+3{,}87\right]$.

2. Gegeben ist: Zufallsvariable X mit $X(\omega_i) = k_i$. Die W'verteilung ist bekannt, also für alle k_i kennt man $P\left(X = k_i\right)$.
   Weiterhin: Zufallsvariable Y mit $Y(\omega_i) = ak_i$. Die W'verteilung für Y ist auch bekannt, nämlich $P\left(Y = ak_i\right) = P\left(X = k_i\right)$. Dann ist

$$E\left(Y\right) = \qquad | \text{ Definition des Erwartungswerts}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} ak_i \cdot P\left(Y = ak_i\right) \quad | \text{ konstanter Faktor a vor die Summe}$$
$$= a\sum_{i=1}^{n} k_i \cdot P\left(Y = ak_i\right) \quad | \text{ W'verteilung ist gleich}$$
$$= a\sum_{i=1}^{n} k_i \cdot P\left(X = k_i\right) \quad | \text{ die Summe ist gerade die Definintion des Erw. für X}$$
$$= aE\left(X\right)$$

HAUSÜBUNGEN

3. a. Berechnung der einzelnen W'

$$P(X=0)=\frac{\binom{10}{0}\binom{30}{5}}{\binom{40}{5}}\approx 0{,}217 \qquad P(X=1)=\frac{\binom{10}{1}\binom{30}{4}}{\binom{40}{5}}\approx 0{,}416$$

$$P(X=2)=\frac{\binom{10}{2}\binom{30}{3}}{\binom{40}{5}}\approx 0{,}278 \qquad P(X=3)=\frac{\binom{10}{3}\binom{30}{2}}{\binom{40}{5}}\approx 0{,}079$$

$$P(X=4)=\frac{\binom{10}{4}\binom{30}{1}}{\binom{40}{5}}\approx 0{,}010 \qquad P(X=5)=\frac{\binom{10}{5}\binom{30}{0}}{\binom{40}{5}}\approx 0{,}0004$$

Also W'verteilung

x_i	0	1	2	3	4	5
$P(X=x_i)$	0,217	0,416	0,278	0,079	0,010	0,0004

(1 Punkt)

b. $E(X)=\sum_{i=0}^{5} x_i P(X=x_i)\approx 1{,}25$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$
$$= \sum_{i=0}^{5} i^2 \cdot P(X=x_i) - 1{,}25^2$$
$$\approx 0{,}847 \qquad \sigma = \sqrt{V(X)} \approx 0{,}82 \qquad 1$$

c) $E(X) = n \cdot \frac{a}{a+b} \qquad n=5 \quad a=10 \quad b=30$

$= 5 \cdot \frac{10}{40} = \frac{5}{4} = 1{,}25$ stimmt

$V(X) = n \cdot \frac{a}{a+b} \cdot \frac{b}{a+b} \cdot \frac{a+b-n}{a+b-1} = 5 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{35}{39}$

$\approx 0{,}841$ stimmt $\qquad 1$

d) $E(X) - \sigma \approx 0{,}33 \qquad E(X) + \sigma \approx 2{,}17$

$P(E(X) - \sigma \le X \le E(X) + \sigma) = P(X=1) + P(X=2)$

$\underline{\approx 0{,}694} \qquad 1$

4. X kann die Werte 1, 2, 3, ..., 11 annehmen. Die W' für alle Werte ist $p=\frac{1}{11}$.

a. Gleichverteilung mit n = 11

$$E(X)=\frac{n+1}{2}=6$$

$$V(X)=\frac{n^2-1}{12}=\frac{121-1}{12}=10$$ (1 Punkt)

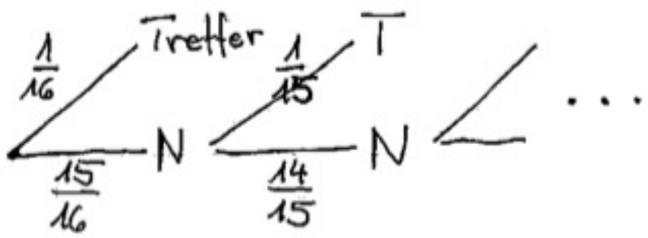
b.

$$V(X)=\sum_{i=1}^{11}\left(i-E(X)\right)^2\cdot P(X=i)$$

$$=(25+16+9+4+1+0+1+4+9+16+25)\cdot\frac{1}{11}$$ (1 Punkt)

$$=110\cdot\frac{1}{11}=10 \quad \text{(stimmt)}$$

5. a. Beginnt man ein verkürztes Baumdiagramm, erhält man



wobei Treffer meint, dass man das defekte Teil gefunden hat und folglich aufhört.

Für den Treffer gleich bei der ersten Wägung gilt $P(X=1)=\frac{1}{16}$.

Ebenso kann man ablesen: $P(X=2)=\frac{15}{16}\cdot\frac{1}{15}=\frac{1}{16}$.

Wir haben offensichtlich für die Zufallsvariable X eine Gleichverteilung mit n = 16.

Also gilt $E(X)=\frac{16+1}{2}=8{,}5$. Man braucht also im Schnitt 8,5 Wägungen, um das Teil zu finden. (1 Punkt)

b) Mit jeder Wägung halbiert man die Menge der zu testenden Teile

$16T \xrightarrow{1.\,Wäg.} 8T \xrightarrow{2.\,W.} 4T \xrightarrow{3.} 2T \xrightarrow{4.} 1T$

Man muss in jedem Fall 4 Wägungen machen.

Also ist hier $E(X)=4$

c. Die 2. Strategie ist auf lange Sicht die bessere, da hier der Erwartungswert für die Anzahl der Wägungen geringer ist. (b und c: 2 Punkte)

6. 1 → 2: Für $k = 0$ ist der 0.te Summand 0, man kann ihn also weglassen und die Summe bei 1 beginnen.

2 → 3: Indextransformation: k wird im Term durch $k+1$ ersetzt, dafür beginnt man bei $k = 0$

3 → 4: Die Multiplikation mit $(k + 1)$ wird ausmultipliziert und die eine Summe in zwei Summen auseinander gezogen: $\sum(a_i + b_i) = \sum a_i + \sum b_i$

4 → 5: In jedem Summanden taucht wenigstens ein Mal $(1 - p)$ auf. Das wird in beiden Summen ausgeklammert. Dadurch wird der Exponent an $(1 - p)$ um 1 kleiner.

5 → 6: Die erste Summe ist nun genau der Erwartungswert (Zeile (1)), die zweite Summe ergibt 1 nach der Übungsaufgabe vom letzten Zettel.

6 → 7: Zeile 6 ist nun eine Gleichung für den gesuchten Erwartungswert, allerdings noch auf beiden Seiten der Gleichung. Die Multiplikation mit $(1 - p)$ wird aufgelöst.

7 → 8: $E(X)$ fällt auf beiden Seiten weg und es wird nach dem verbleibenden $E(X)$ aufgelöst. (2 Punkte)