PPRÄSENZÜBUNGEN

1. a) Zu zeigen ist: Die Summe aller W' $\sum_{k=0}^{\infty} p(1-p)^k$ ist 1.

$\sum_{k=0}^{\infty} p(1-p)^k = p\sum_{k=0}^{\infty}(1-p)^k$ Das ist eine geometrische Reihe mit $q = 1-p$. Da $|q| < 1$, hat die geometrische Reihe einen Grenzwert. Zur Erinnerung: $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$.

$$= p \cdot \frac{1}{1-(1-p)} = p \cdot \frac{1}{p} = 1$$

2. Wir berechnen zunächst die fehlende W':

$$P(X=10) = 1 - \left(0{,}3 + 0{,}2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{12}$$

Dann berechnet sich der Erwartungswert zu:

$$E(X) = \sum_{\text{alle k}} k \cdot P(X=k)$$
$$= (-2)\cdot 0{,}3 + 0 \cdot 0{,}2 + 1 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 10 \cdot \frac{1}{12}$$
$$= -0{,}6 + 0{,}25 + 0{,}5 + \frac{5}{6} \approx 0{,}983$$

HAUSÜBUNGEN

3. a.

Würfelwurf	1	2	3	4	5	6
Wert k laut Spielregel	1	2	3	4	5	0
$P(X = k)$	jeweils $\frac{1}{6}$					

Also ergibt sich für den Erwartungswert:

$E(X) = (1+2+3+4+5+0) \cdot \frac{1}{6} = \frac{15}{6} = 2{,}5$ (1 Punkt)

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = (1+4+9+16+25+0)\cdot\frac{1}{6} - 2{,}5^2$$
$$= \frac{55}{6} - 6{,}25 \approx 2{,}92$$

$\sigma_X = \sqrt{V(X)} \approx 1{,}7$ (1 Punkt)

b. Übersichtstabelle für die Augensumme nach zwei Würfen:

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	2	3	4	5	6	0
2	3	4	5	6	7	0
3	4	5	6	7	8	0
4	5	6	7	8	9	0
5	6	7	8	9	10	0
6	0	0	0	0	0	0

Die W' für jede Augensumme ist $\frac{1}{36}$.

(1 Punkt)

$$E(Y)=\left[(2+3+4+5+6)+(3+4+5+6+7)+...(6+7+8+9+10)\right]\cdot\frac{1}{36}$$

(1 Punkt)

$$=\left[20+25+30+35+40\right]\cdot\frac{1}{36}=\frac{150}{36}=4\frac{1}{6}\approx 4{,}17$$

$$V(Y)=E(Y^2)-E(Y)^2$$

$$=(1\cdot 4+2\cdot 9+3\cdot 16+4\cdot 25+5\cdot 36+4\cdot 49+3\cdot 64+2\cdot 81+1\cdot 100)\cdot\frac{1}{36}-\left(\frac{25}{6}\right)^2$$

$$=\frac{1000}{36}-\frac{625}{36}=\frac{375}{36}=\frac{125}{12}\approx 10{,}42$$

(1 Punkt)

4. a) Es gilt $P(G=g)=\frac{2}{g}\cdot P(G=2)$

Setze $P(G=2)=p_2$

Dann ist $P(G=5)=\frac{2}{5}p_2$, $P(G=20)=\frac{1}{10}p_2$

$P(G=50)=\frac{1}{25}p_2$

$P(G=2)+P(G=5)+P(G=20)+P(G=50)=1$

$\frac{77}{50}p_2=1$ (1)

Also $p_2=P(G=2)=\frac{50}{77}$

$P(G=5)=\frac{20}{77}$ $P(G=20)=\frac{5}{77}$ $P(G=50)=\frac{2}{77}$ (1)

b) $E(G)=2\cdot\frac{50}{77}+5\cdot\frac{20}{77}+20\cdot\frac{5}{77}+50\cdot\frac{2}{77}=\frac{400}{77}\approx 5{,}19$

d.h. im Schnitt gewinnt man mit jedem Los 5,19€ (1)

c) $3600\,€ : \frac{400}{77}\frac{€}{\text{Los}} = 3600\cdot\frac{77}{400}\text{ Lose} = 693\text{ Lose}$

Lose zu 2€ : $693\cdot\frac{50}{77}=450$ ↷ 900 €

" 5 € : $693\cdot\frac{20}{77}=180$ ↷ 900 €

" 20€ : $693\cdot\frac{5}{77}=45$ ↷ 900 €

" 50€ : $693\cdot\frac{2}{77}=18$ ↷ 900 € (1)

693 3600€

5. Berechnung der W'en:
drei Würfelwürfe (mit Berücksichtigung der Reihenfolge) 216 Möglichkeiten.
0 Mal Glückszahl: $5^3 = 125$ Möglichkeiten
1 Mal Glückszahl: $3 \cdot 1 \cdot 5^2 = 75$ Möglichkeiten
2 Mal Glückszahl: $3 \cdot 1^2 \cdot 5 = 15$ Möglichkeiten
3 Mal Glückszahl: $1^3 = 1$ Möglichkeit

Anzahl k der Glückszahl	0	1	2	3
Auszahlung bei Einsatz B	0	B	$2B$	$3B$
$P(X = k)$	$\frac{125}{216}$	$\frac{75}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{1}{216}$

(2 Punkte)

$$E\left(\text{Auszahlung}\right) = B \cdot \frac{75}{216} + 2B \cdot \frac{15}{216} + 3B \cdot \frac{1}{216} = B \cdot \frac{1}{216} \cdot \left(75 + 2 \cdot 15 + 3\right) = \frac{108}{216} B = \frac{1}{2} B$$

D.h. auf einen Einsatz bekommt man auf lange Sicht die Hälfte des Einsatzes wieder heraus. Damit lohnt sich das Spiel für den Anbieter. (1 Punkt)

6.

Zahl	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Häufigk.	2	3	2	2	3	3	4	0	5	5	3	3	6	2	2

(1 Punkt)

Median: mittlere Zahl Bei 45 Zahlen ist das die 23. Zahl, die eine $\underline{\underline{9}}$ ist. (1 Punkt)
Den Mittelwert errechnet man aus der Häufigkeitstabelle über
$1\cdot2+2\cdot3+3\cdot2+4\cdot2+5\cdot3+6\cdot3+7\cdot4+8\cdot0+9\cdot5+10\cdot5+11\cdot3+12\cdot3+13\cdot6+14\cdot2+15\cdot2$
$= 2+6+6+8+15+18+28+0+45+50+33+36+78+28+30$
$= 383$
Für den Mittelwert muss man das noch durch die Anzahl der Zahlen teilen.
Mittelwert $\approx$ 8,51, also etwas kleiner als der Median. (1 Punkt)