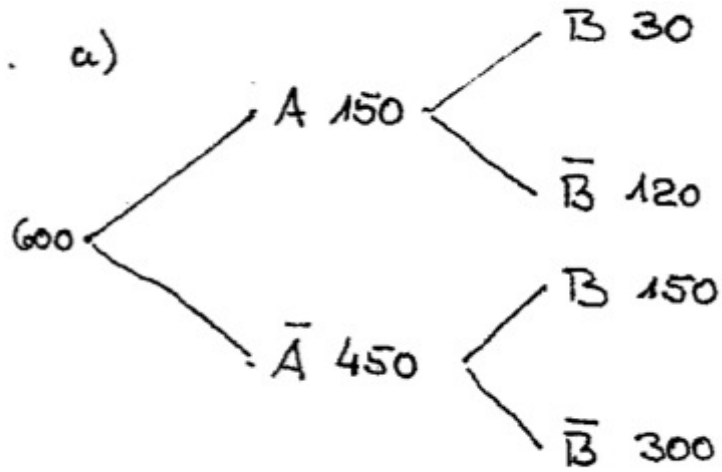
PRÄSENZÜBUNGEN

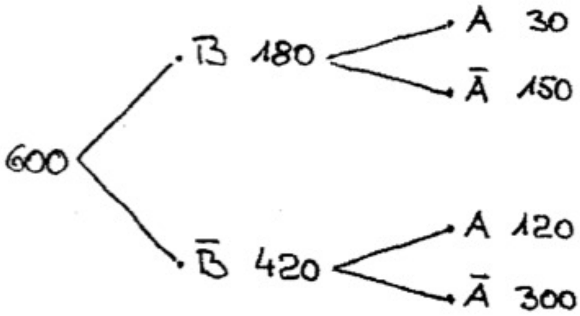
1.



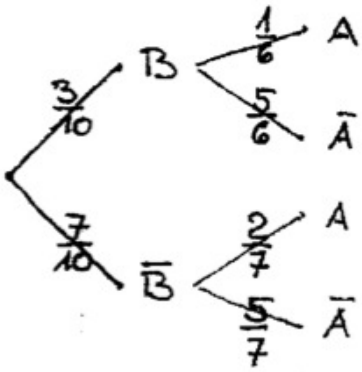
b. Vierfeldertafel

	B	$\bar{B}$	
A	30	120	150
$\bar{A}$	150	300	450
	180	420	600

c. i.



ii.



Das Diagramm mit den W' erhält man, indem man an jedem Zweig die Endzahl durch die Anfangszahl dividiert.

d. $P\left(A|B\right)=\frac{1}{6}$ $P\left(A|\bar{B}\right)=\frac{2}{7}$ $P\left(\bar{A}|\bar{B}\right)=\frac{5}{7}$ $P\left(B|\bar{A}\right)=\frac{1}{3}$ $P\left(\bar{B}|A\right)=\frac{4}{5}$

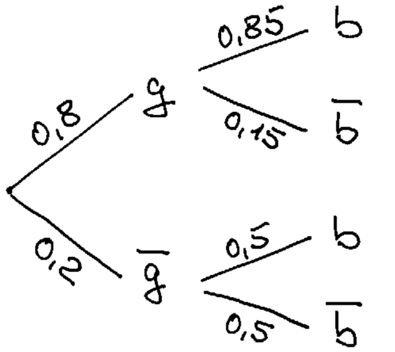
e. Die erste Frage ist die nach $P\left(B|A\right)=\frac{1}{5}=20\%$. Das kann man im Diagramm der Aufgabenstellung ablesen.

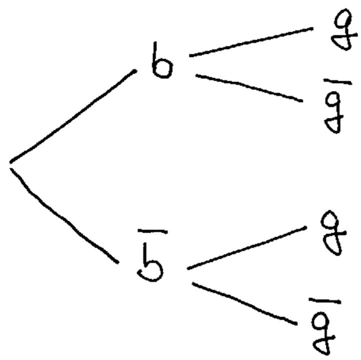
Die zweite Frage ist die nach $P\left(A|B\right)=\frac{1}{6}\approx 17\%$. Das ergibt sich aus dem Diagramm in c. ii.

HAUSÜBUNGEN

2. Wir verwenden folgende Bezeichnungen für Ereignisse:
b = „Die Prüfung ist bestanden“ g = „Der Student ist gut vorbereitet“

a. Die Prüfung besteht aus einer Frage. Dann wissen wir: $P(b|g)=0{,}85$ $P(b|\overline{g})=0{,}5$



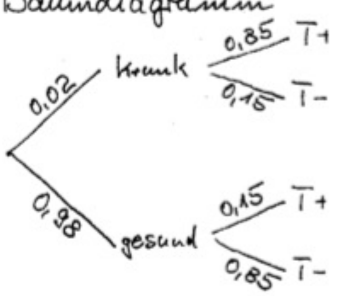


Gesucht ist im rechten Baumdiagramm $P(g|b)$. Es gilt allgemein
$P(g)\cdot P(b|g)=P(g\cap b)=P(b)\cdot P(g|b)$. Nach $P(g|b)$ auflösen ergibt:
$P(g|b)=\dfrac{P(g)\cdot P(b|g)}{P(b)}$. Dazu muss man die totale W’ $P(b)$ berechnen.
$P(b)=P(g\cap b)+P(\overline{g}\cap b)=0{,}8\cdot 0{,}85+0{,}2\cdot 0{,}5=0{,}78$
Also $P(g|b)=\dfrac{0{,}8\cdot 0{,}85}{0{,}78}\approx 0{,}8718$. Damit ist ein Student, der die Prüfung bestanden hat, mit ca. 87% auch ein guter Student. **(2 Punkte)**

b. Nun müssen für eine Prüfung zwei von drei Fragen richtig beantwortet werden.
Also gilt $P(b)=P(rrr)+P(rrf)+P(rfr)+P(frr)$.
Dann gilt für den guten Studenten $P(b|g)=0{,}85^3+3\cdot 0{,}85^2\cdot 0{,}15\approx 0{,}939$ und für den schlecht vorbereiteten $P(b|\overline{g})=0{,}5^3+3\cdot 0{,}5^2\cdot 0{,}5=0{,}5$ **(1 Punkt)**
Für die totale W’ gilt dann: $P(b)=P(g\cap b)+P(\overline{g}\cap b)\approx 0{,}8\cdot 0{,}939+0{,}2\cdot 0{,}5=0{,}8512$
und analog zu a. $P(g|b)\approx\dfrac{0{,}8\cdot 0{,}939}{0{,}8512}\approx 0{,}8825$. **(1 Punkt)**

3.

Baumdiagramm



T+ : Test zeigt krankheit an
T- : Test zeigt keine krankh.

1

a) Gesucht ist $P(\text{krank} \mid T+)$

$$P(\text{krank} \mid T+) = \frac{P(\text{krank und } T+)}{P(T+)}$$

$$P(T+) = 0{,}02 \cdot 0{,}85 + 0{,}98 \cdot 0{,}15 = 0{,}164$$

$$P(\text{krank} \mid T+) = \frac{0{,}02 \cdot 0{,}85}{0{,}164} \approx 0{,}104 = 10{,}4\%$$

Zeigt der Test die Krankheit an, so ist man mit einer W' von etwa 10,4% tatsächlich krank. (1)

b) $P(T+ \mid \text{krank})$ von 85% auf 90%

$$P(T+) = 0{,}02 \cdot 0{,}9 + 0{,}98 \cdot 0{,}15 = 0{,}165$$

$$P(\text{krank} \mid T+) = \frac{0{,}02 \cdot 0{,}90}{0{,}165} \approx 0{,}109 = \underline{10{,}9\%} \quad (1)$$

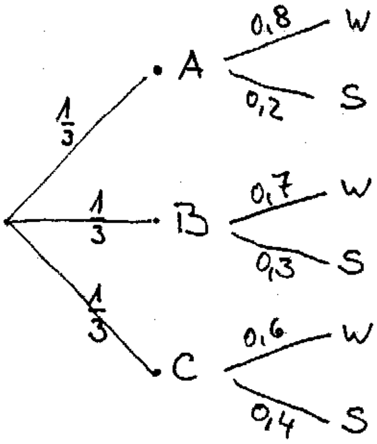
$P(T- \mid \text{gesund})$ von 85% auf 90%

$$P(T+) = 0{,}02 \cdot 0{,}85 + 0{,}98 \cdot 0{,}1 = 0{,}115$$

$$P(\text{krank} \mid T+) = \frac{0{,}02 \cdot 0{,}85}{0{,}115} \approx 0{,}148 = \underline{14{,}8\%}$$

Es lohnt sich also eher, in die genaue Erkennung der Gesunden (Spezifität) zu investieren. (1)

4. Baumdiagramm



a) $P(A \cap w) = \frac{1}{3} \cdot 0{,}8$

$\approx \underline{\underline{26{,}7\%}}$ $\frac{1}{2}$

b) $P(C \cap s) = \frac{1}{3} \cdot 0{,}4$

$\approx \underline{\underline{13{,}3\%}}$ $\frac{1}{2}$

c) $P(s) = P(A \cap s) + P(B \cap s) + P(C \cap s)$

$= \frac{1}{3} \cdot (0{,}2 + 0{,}3 + 0{,}4) = 0{,}3 = \underline{\underline{30\%}}$ 1

d) $P(B|s) = \frac{P(B \cap s)}{P(s)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot 0{,}3}{0{,}3} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$ $\frac{1}{2}$

e) $P(C|w) = \frac{P(C \cap w)}{P(w)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot 0{,}6}{1 - 0{,}3} = \frac{0{,}2}{0{,}7} \approx \underline{\underline{28{,}6\%}}$ $\frac{1}{2}$

5. a) Im Baumdiagramm hat man

$\xrightarrow{P(A)} A \xrightarrow{P(B|A)} B$

Pfadregel: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) \quad | : P(A)$

$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ 1

In der Aufgabenstellung sind A und B vertauscht

b) Formal: $P(A|\Omega) = \frac{P(A \cap \Omega)}{P(\Omega)}$

Generell gilt: $A \cap \Omega = A$ und $P(\Omega) = 1$

also $P(A|\Omega) = \frac{P(A)}{1} = P(A)$ 1

Inhaltlich: $\ldots|\Omega$ heißt „... wenn schon Ω eingetreten ist". Da Ω bedeutet „alles, was eintreten kann", ist $|\Omega$ praktisch keine Einschränkung. (1)

c) Formal: $P(A|\bar{A}) = \frac{P(A \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{P(\emptyset)}{P(\bar{A})} = \underline{\underline{0}}$

Inhaltlich: ~~$A \cap \bar{A}$~~ $\bar{A}$ ist das logische Gegenteil von A. Wenn ich schon weiß, dass $\bar{A}$ eingetreten ist, so kann A unmöglich eintreten. (1)

d) i) $P(A|B) = P(A|\bar{B})$ bedeutet, dass die W' für A gleich ist, egal ob B eingetreten ist oder nicht. Das bedeutet, dass A unabhängig von B ist. Anschaulich ist damit <u>noch nicht</u> klar, dass auch B von A unabhängig ist. (1)

ii) „$\Rightarrow$"

Es gilt: $P(A|B) = P(A|\bar{B})$

~~also~~ $\cancel{P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = P(A|\bar{B})}$

totale W': $P(A) = P(A|B) \cdot P(B) + P(A|\bar{B}) \cdot P(\bar{B})$

gleich nach Vor.

$$= P(A|B) \cdot \underbrace{[P(B) + P(\bar{B})]}_{=1}$$

$$P(A) = P(A|B)$$

Allgemein gilt $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad | \cdot P(B)$

$$P(A|B) \cdot P(B) = P(A \cap B)$$

$$P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B)$$

q.e.d. (2)

d) ii „$\Leftarrow$"

Vorauss. $P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B)$

Allgem. gilt $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)} = P(A)$

$$P(A|\overline{B}) = \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} \quad (*)$$

Für Mengen gilt: $A = \underbrace{(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})}_{\text{disjunkt}}$

Nach Kolmogorov: $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$

$$\Rightarrow P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$$

Voraus.

$$= P(A) - P(A) \cdot P(B)$$

$$= P(A)[1 - P(B)] \quad (1)$$

es gilt allgem: $P(\overline{B}) = 1 - P(B) \quad (2)$

(1) und (2) einsetzen in $(*)$

$$P(A|\overline{B}) = \frac{P(A)[1-P(B)]}{1-P(B)} = P(A)$$

Also gilt: $P(A|\overline{B}) = P(A) = P(A|B)$ q.e.d.

für unabhängige A, B

2