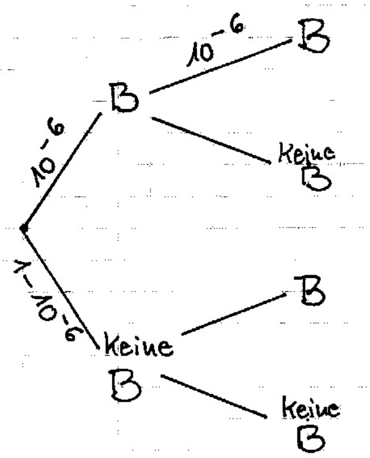
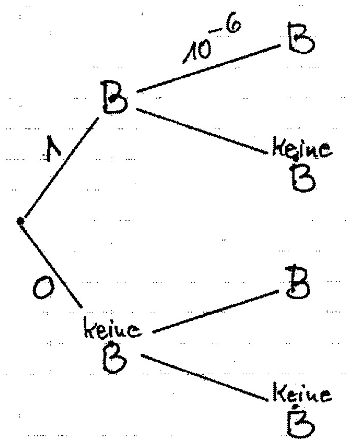
3. Übung Lösungen

1. a. Im Baumdiagramm sieht man, dass man für „zwei Bomben gleichzeitig“ auf dem obersten Pfad läuft. Die W’ ist $10^{-6} \cdot 10^{-6} = 10^{-12}$, also wirklich geringer als für eine Bombe.





b. Die Situation für die erste Bombe wird aber von dem Reisenden mit Sicherheit hergestellt. Für diese Bombe ist die W’ nicht weiterhin 10^{-6}, sondern sie ist 1, da ja die Bombe tatsächlich da ist. Nun ist die W’ für zwei Bomben $1 \cdot 10^{-6} = 10^{-6}$, also genau die für „eine Bombe“, wenn alles rein zufällig ist.

2. Wenn zwei Männer als Vater in Frage kommen und für beide die W’ gleich ist, dann ist sie für jeden Mann 0,5.
Die 99,9%ige Sicherheit bezieht sich auf eine andere Situation. Man weiß von einem Mann, dass er mit Sicherheit der Vater eines Kindes ist und führt mit diesen beiden den Test 1000 mal durch. Dann kann man erwarten, dass ein Mal der Test fälschlicherweise anzeigen wird, dass der Vater nicht der Vater ist und in 999 Fällen wird er das richtige Ergebnis anzeigen. Auf diese Sicherheit des Tests bezieht sich der Gerichtsmediziner.

3. a. Es gibt insgesamt 12 Ergebnisse (Paare) und alle sind gleich w’. Hier ist die Laplace-Bedingung erfüllt.
b. Statistische Untersuchungen zeigen, dass die W’ nicht genau gleich sind, sondern die W’ für eine Jungengeburt etwas größer ist. Die Laplace-Bedingung ist nicht erfüllt. Aber bei einfacheren Abschätzungen kann man recht gut mit der Laplace-W’ arbeiten, also annehmen, dass die W’ für Junge und Mädchen gleich ist.
c. Hier sind die W’ für beide Ereignisse extrem verschieden.
d. Auch diese Ereignisse sind nicht gleichw’. Es ist die Ungleichheit, die die unterschiedliche Gewinnhöhe rechtfertigt. Je unwahrsch. ein Ereignis ist, desto höher ist die Gewinnsumme, mit der man rechnen kann.
e. Beim Würfeln mit zwei Würfeln sind alle Paare von einzelnen Würfelergebnissen gleich w’. Aber für die Augensumme 2 ist nur ein Paar richtig (1,1), für die Augensumme 7 sind aber 6 Paare richtig, nämlich (1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1). Damit ist die W’ für die Summe 7 deutlich höher als die W’ für die 2. Betrachtet man die Augensumme, ist die Laplace-Bedingung nicht erfüllt.

3. Übung Lösungen

HAUSÜBUNGEN

4. a. „sehr schnell“ bedeutet, dass gleich die ersten beiden Socken die gewünschten blauen sind. Dann ist der maßgebliche Pfad

$\bullet \xrightarrow{\frac{2}{6}} B \xrightarrow{\frac{1}{5}} B$ und danach hört man ja auf zu Ziehen, da man hat, was man will

Die W' ist dann $P(B,B) = \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{15}$.

b. „Besonders lange“ bedeutet, dass man erst alle grauen Socken zieht, bevor man die blauen erwischt. Der Pfad sieht dann so aus:

$\bullet \xrightarrow{\frac{4}{6}} S \xrightarrow{\frac{3}{5}} S \xrightarrow{\frac{2}{4}} S \xrightarrow{\frac{1}{3}} S \xrightarrow{\frac{2}{2}} B \xrightarrow{\frac{1}{1}} B$

Die W' ist dann $P(S,S,S,S,B,B) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{15}$

Erstaunlicherweise sind die W' in a. und b. gleich.

c. Auch hier kann man sich einen analogen Pfad aufzeichen:

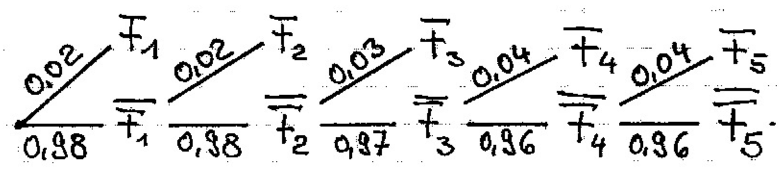
$\bullet \xrightarrow{\frac{s}{s+w}} S \xrightarrow{\frac{s-1}{s+w-1}} S \xrightarrow{\frac{s-2}{s+w-2}} \ldots \xrightarrow{\frac{1}{w+1}} S \xrightarrow{\frac{w}{w}} W$

Alle nachfolgenden weißen Kugeln werden nun mit einer W' von 1 gezogen (da ja nur noch weiße vorhanden sind). Dann ist die W'

$P\left(\underbrace{SSS...S}_{\text{s Mal}}W\right) = \frac{s}{s+w} \cdot \frac{s-1}{s+w-1} \cdot \frac{s-2}{s+w-2} \cdot \ldots \frac{1}{w+1} \cdot \cancel{\frac{w}{w}}$ Diese Produkte im Zähler und Nenner erweitert man mit $w!$, so dass im Nenner vollständig $(s+w)!$ entsteht.

$P\left(\underbrace{SSS...S}_{\text{s Mal}}W\right) = \frac{s!}{(s+w)(s+w-1)...(w+1)} \frac{w!}{w!} = \frac{s! \cdot w!}{(s+w)!}$ Den letzten Bruch kann man noch umformen in $P\left(\underbrace{SSS...S}_{\text{s Mal}}W\right) = \frac{1}{\frac{(s+w)!}{s! \cdot w!}}$, was nichts anderes ist als ein günstiger Fall dividiert durch alle Fälle, nämlich alle Permutationen von s schwarzen und w weißen Kugeln.

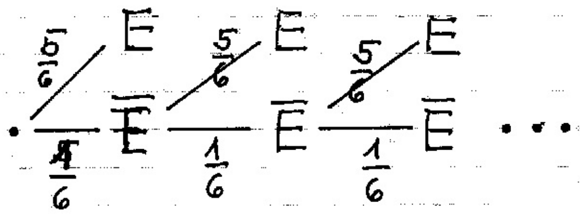
5. a. Ein Teil ist fehlerfrei, wenn in allen Schritten kein Fehler passiert. Im Baum schreibt man dafür $\overline{F_i}$, i = 1,2,..,5. Wir suchen also die W' des Ereignisses $\overline{F_1}\,\overline{F_2}\,\overline{F_3}\,\overline{F_4}\,\overline{F_5}$.



Nach der Pfadregel erhält man

$P\left(\overline{F_1}\,\overline{F_2}\,\overline{F_3}\,\overline{F_4}\,\overline{F_5}\right) = 0{,}98 \cdot 0{,}98 \cdot 0{,}97 \cdot 0{,}96 \cdot 0{,}96$

$\approx 85{,}9\%$

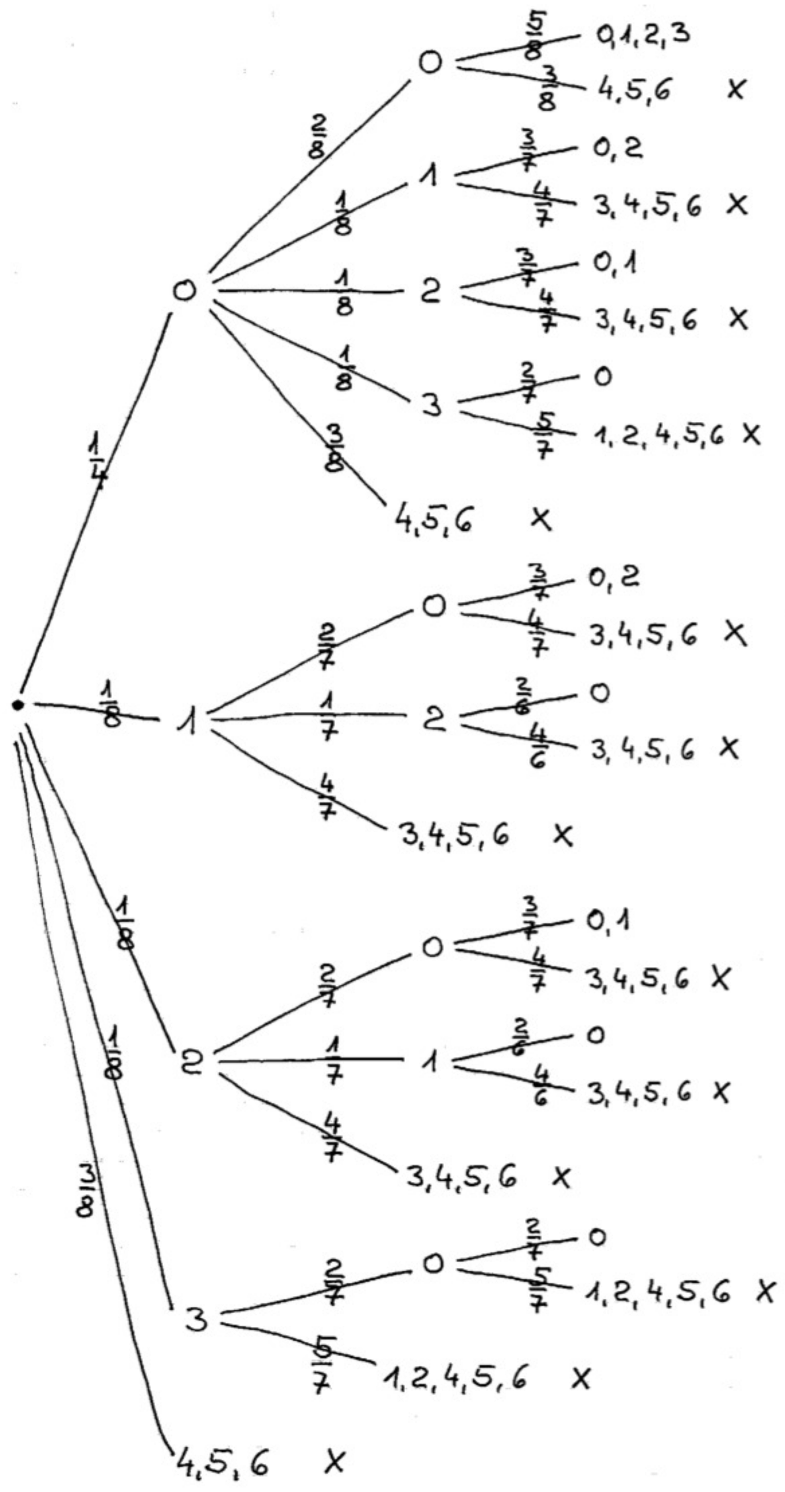


3. Übung Lösungen

b. Laut Aufgabenstellung wird ein Fehler nicht entdeckt (bezeichnet mit $\overline{E}$) mit einer W' von $\frac{1}{6}$. Nach zweimaliger Kontrolle bleibt ein Fehler unentdeckt mit der W'

$P\left(\overline{E}\overline{E}\right)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{36}\approx 2{,}8\%$. Damit liegt die Fehlerw' schon unter 5%.

6.



(3 Punkte)

3. Übung Lösungen

P(Summe ist 4 oder mehr)

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{8} + \frac{1}{8}\cdot\frac{4}{7} + \frac{1}{8}\cdot\frac{4}{7} + \frac{1}{8}\cdot\frac{5}{7} + \frac{3}{8}\right)$$

$$+ \frac{1}{8}\left(\frac{2}{7}\cdot\frac{4}{7} + \frac{1}{7}\cdot\frac{4}{6} + \frac{4}{7}\right) + \frac{1}{8}\left(\frac{2}{7}\cdot\frac{4}{7} + \frac{1}{7}\cdot\frac{4}{6} + \frac{4}{7}\right)$$

$$+ \frac{1}{8}\left(\frac{2}{7}\cdot\frac{5}{7} + \frac{5}{7}\right) + \frac{3}{8}$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{3}{32} + \frac{1}{14} + \frac{1}{14} + \frac{5}{56} + \frac{3}{8}\right)$$

$$+ \frac{1}{8}\left(\frac{8}{49} + \frac{2}{21} + \frac{4}{7}\right)\cdot 2 + \frac{1}{8}\left(\frac{10}{49} + \frac{5}{7}\right) + \frac{3}{8}$$

$$= \frac{16417}{18816} \approx 87{,}3\%$$

1

7.

a. $\Omega = \{a, b, c\}$

Anz. d. Elem.	0	1	2	3
Teilmengen	$\emptyset$	$\{a\}\ \{b\}\ \{c\}$	$\{a,b\}\ \{a,c\}\ \{b,c\}$	$\{a,b,c\}$

$\mathcal{P}(\Omega)$ besteht aus $8 = 2^3$ Teilmengen von Ω und $|\Omega| = 3$.

1

3. Übung Lösungen

b. Kombinatorische Überlegung

Die n Elemente werden angeordnet

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, \ldots, n\}$

$(0, 1, 1, 0, \ldots, 1)$

In einem n-Tupel schreibt man auf jeden Platz 0, wenn das Element nicht für eine Teilmenge ausgewählt wird, und 1, wenn es gewählt wird. So wird jeder Teilmenge von Ω eindeutig ein n-Tupel mit 0;1 zugeordnet

Es gibt 2^n Tupel dieser Art, also auch 2^n Teilmengen.

2

c. Vollständige Induktion

Indukt. Anfang: $\Omega = \{1\}$ $|\Omega| = 1$

$\mathcal{P}(\Omega) = \{\emptyset, \{1\}\}$ also $|\mathcal{P}(\Omega)| = 2^1 = 2$

Induktionsvor.: $|\Omega| = n \Rightarrow |\mathcal{P}(\Omega)| = 2^n$

Induktionsbeh.: $|\Omega| = n+1 \Rightarrow |\mathcal{P}(\Omega)| = 2^{n+1}$

Induktionsbeweis:

$|\Omega| = n+1$ also $\Omega = \{1, 2, 3, \ldots n+1\}$

$= \{1, 2, 3, \ldots n\} \cup \{n+1\}$

Aus den ersten n Elementen kann man nach Ind-voraussetzung 2^n Teilmengen bilden. Alle diese enthalten das Element n+1 nicht. Jede dieser Teilmengen wird mit $\{n+1\}$ vereinigt. Das sind alle Teilmengen von Ω die n+1 enthalten.

Also $|\mathcal{P}(\Omega)| = 2^n + 2^n = 2^{n+1}$

alle Teilmengen

ohne mit dem Element n+1

Damit ist der Schritt von n auf n+1 bewiesen.

3