2. Übung Lösungen

1. a. $\Omega=\{(B,B),(B,Z),(Z,B),(Z,Z)\}$

   b. $\Omega=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6)\}$

   c. $\Omega=\mathbb{N}$ Die Ergebnisse sind die Anzahlen der Würfe, die man benötigt, bis das erste Mal „Kopf" auftaucht. Das Ergebnis 4 sagt also, dass in dem Versuch drei Mal „Zahl" auftauchte und dann beim 4. Mal „Kopf". Prinzipiell sind alle natürlichen Zahlen möglich.

   d. i. $\Omega=\{\text{Kreuz, Pik, Herz, Karo}\}$

   ii. $\Omega=\{\text{Ass, nicht Ass}\}$

   iii. $\Omega=\{\text{Kreuz Bube, nicht Kreuz Bube}\}$

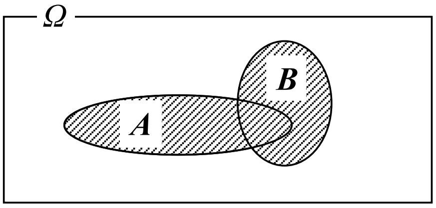
2. a. $E_a=\{(B,B),(Z,Z)\}$

   b. $E_b=\{(1,2),(1,4),(1,6),(2,1),(2,3),(2,5)\}$ ACHTUNG! Das Ereignis wird **nicht** beschrieben durch $E_b=\{3,5,7\}$. Gefragt ist nach den Ergebnissen aus 1b., und das sind Paare von Zahlen. Gefragt ist **nicht** nach der Primzahl, die in der Summe herauskommt.

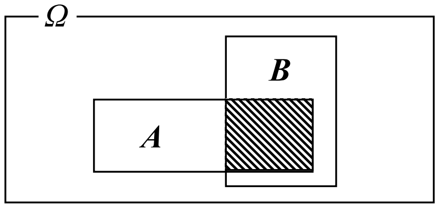
   c. $E_c=\{(1,6),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6)\}$

   d. $E_d=\{1,2\}$

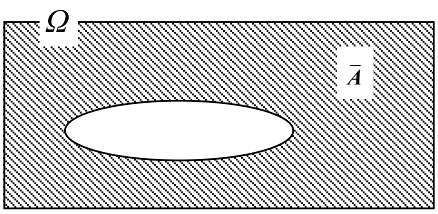
3. a.



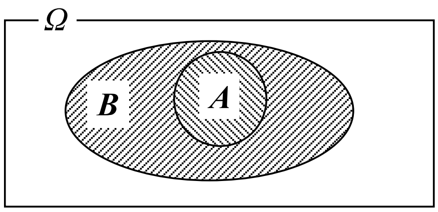
$A\cup B$



$A\cap B$

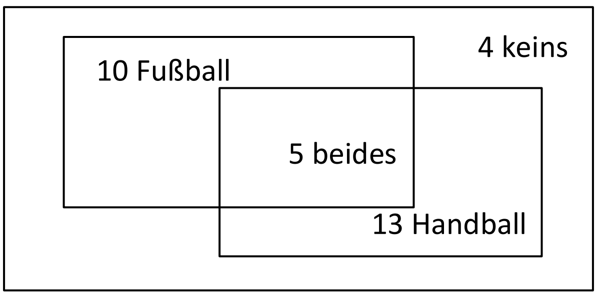


$\bar{A}=\Omega\setminus A$



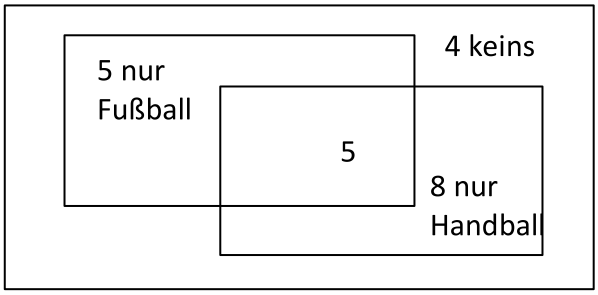
$A\subseteq B$

b. Die Zahlen beziehen sich auf den ganzen Rechteckrahmen, umfassen also auch die Fläche des Durchschnitts.



2. Übung Lösungen

Also gibt es in der Klasse 4 +5+5+8 = 22 SchülerInnen



c.

$$|A \cup B| = (|A| - |A \cap B|) + (|B| - |A \cap B|) + |A \cap B|$$
$$= |A| + |B| - |A \cap B|$$

4. a. Setzt man sehr oft auf immer die gleiche Zahl, so wird langfristig die Anzahl der Treffer ca. $\frac{1}{37}$ der Anzahl der Versuche ausmachen.
   b. In der Lostrommel ist etwa die Hälfte aller Lose Gewinne und die andere Hälfte sind Nieten.
   c. Hier ist eine W'-aussage eher unsinnig, da man die quantitative Aussage (30%) mit nichts erhärten kann.

HAUSÜBUNGEN

5. i. richtig, ii. richtig, iii. falsch, iv. richtig, v. richtig

6. a.

$$\Omega = \{(s,s,w),(s,w,s),(w,s,s),(s,s,b),(s,b,s),(b,s,s),(s,b,b),(b,s,b),(b,b,s),$$
$$(w,b,b),(b,w,b),(b,b,w),(b,b,b),(s,w,b),(s,b,w),(w,s,b),(w,b,s),$$
$$(b,s,w),(b,w,s)\}$$

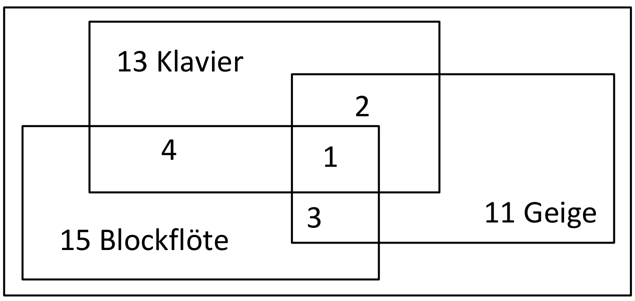
$A =$ "wenigstens zwei Kugeln haben die gleiche Farbe"

$$=\{(s,s,w),(s,w,s),(w,s,s),(s,s,b),(s,b,s),(b,s,s),(s,b,b),(b,s,b),(b,b,s),$$
$$(w,b,b),(b,w,b),(b,b,w),(b,b,b)\}$$

b.

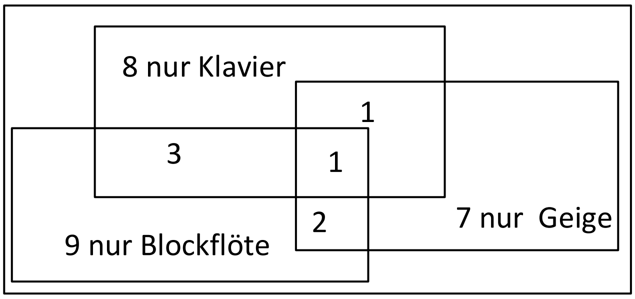
$$\Omega = \{(m),(j),(m,m),(m,j),(j,m),(j,j),(m,m,m),(m,m,j),(m,j,m),(j,m,m),$$
$$(m,j,j),(j,m,j),(j,j,m),(j,j,j)\}$$

7. Im ersten Ansatz werden die gegebenen Zahlen in ein Diagramm eingetragen. Hier umfassen die Zahlen immer auch die Durchschnittsmengen, die innerhalb liegen.



2. Übung Lösungen

Hier sind nun wieder alle Zahlen, die die disjunkten Teilmengen meinen.
Addiert man hier alle Zahlen, erhält man die Anzahl der Schüler in der Klasse:
8 + 1 + 3 + 1 + 2 + 9 + 7 = 31



allgemein gilt: $|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$

Also hier: alle Schüler = 15 + 11 +13 – 4 – 3 – 2 + 1 = 39 – 9 + 1 = 31

c. Nach 3c gilt: $|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$

$|A\cup B\cup C|=|A\cup(B\cup C)|$, wobei nun $(B\cup C)$ als eine Menge aufgefasst wird

$\overset{3c}{=}|A|+|B\cup C|-|A\cap(B\cup C)|$ im letzten Ausdruck wird A verteilt

$=|A|+|B\cup C|-|(A\cap B)\cup(A\cap C)|$ Nun sind die beiden hinteren Mengen wieder die Vereinigung von zwei Mengen. Hier kann in beiden Fällen 3c angewendet werden.

$\overset{\text{2 Mal 3c}}{=}|A|+(|B|+|C|-|B\cap C|)-(|A\cap B|+|A\cap C|-|A\cap B\cap A\cap C|)$ Löst man die runden Klammern auf und ordnet nach der Anzahl der Mengen in der Machtigkeits-berechnung, so erhält man als Endergebnis:

$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$

8. a.

$E_1=\{b\}$ $E_3=\bar{E}_1=\{a,c,d,e\}$ $E_5=E_1\cup E_4=\{a,b,e\}$ $E_6=\bar{E}_5=\{c,d\}$

$E_2=\{b,c,d\}$ $E_4=\bar{E}_2=\{a,e\}$

dazu die beiden Ereignisse, die immer enthalten sind:

$E_7=\Omega=\{a,b,c,d,e\}$ $E_8=\varnothing$

Die Menge $\{E_1,E_2,E_3,E_4,E_5,E_6,E_7,E_8\}$ ist die gesuchte Ereignisalgebra $\boldsymbol{A}$ und sie ist echt kleiner als die Potenzmenge von Ω.

b. $P(E_1)=0{,}2$ und $P(E_2)=0{,}4$

Da $E_1\cup E_6=E_2$ und $E_1\cap E_6=\varnothing$, gilt $P(E_1)+P(E_6)=P(E_2)$, folglich $P(E_6)=0{,}2$.

Über die Komplementärmenge gilt dann

$P(E_3)=0{,}8$ $P(E_4)=0{,}6$ $P(E_5)=0{,}8$

nach den Axiomen gilt $P(E_7)=1$ und $P(E_8)=0$

2. Übung Lösungen

9. Die gegebenen Eigenschaften der Sigma-Algebra sind

1. $\Omega \in \mathbf{A}$ 2. $A \in \mathbf{A} \Rightarrow \overline{A} \in \mathbf{A}$ 3. $A, B \in \mathbf{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathbf{A}$

Voraussetzung: $\mathrm{A,B} \in \mathbf{A}$

$2. \Rightarrow \overline{\mathrm{A}}, \overline{\mathrm{B}} \in \mathbf{A}$

$3. \Rightarrow \overline{\mathrm{A}} \cup \overline{\mathrm{B}} \in \mathbf{A}$

$2. \Rightarrow \overline{\overline{\mathrm{A}} \cup \overline{\mathrm{B}}} \in \mathbf{A}$

d'Morgansche Regeln für Mengen: $\Rightarrow \overline{\overline{A}} \cap \overline{\overline{B}} \in \mathbf{A}$

wegen $\overline{\overline{A}} = A$ gilt: $A \cap B \in \mathbf{A}$ □