



13. Übung

Binomialverteilung, Regressionsgerade

Präsenzübungen (für 5-7.7.)

1. Erläutern Sie die nachfolgende Umformung Schritt für Schritt. Dabei ist \bar{x} der übliche Mittelwert der einzelnen x -Werte.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 &= \sum_{i=1}^n (x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^n 2x_i\bar{x} + \sum_{i=1}^n \bar{x}^2 \\ &= \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\bar{x} \sum_{i=1}^n x_i + \bar{x}^2 \sum_{i=1}^n 1 \\ &= \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\bar{x} \cdot n\bar{x} + \bar{x}^2 \cdot n \\ &= \sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2\end{aligned}$$

2. Sie haben folgende Messtabelle:

x	-3	2	3	6	8	14
y	11	9	5	1	-2	-6

- a. Berechnen Sie händisch die Ausgleichsgerade.
- b. Zeichnen Sie Daten und Ausgleichsgerade in ein Diagramm.

Hausübungen (Abgabe: Mo, 11.7.) (*das ist die letzte Übung zum Abgeben*)

3. In einem Bernoulli-Experiment kann die Trefferw' $p_1 = 0,3$ sein oder $p_2 = \frac{1}{3}$. Um das zu entscheiden führen Sie $n = 60$ Experimente durch.
 - a. Wie groß sind für die beiden alternativ zu entscheidenden W' die Erwartungswerte?
 - b. Man setzt folgende Entscheidungsregel: Hat man 18 oder weniger Treffer, so entscheidet man sich für die kleinere W' p_1 , bei 19 oder mehr Treffern für die größere W' p_2 .
 - i. Wie groß ist die W', dass man sich fälschlicher Weise für die kleinere W' entscheidet?
 - ii. Wie groß ist die W', dass man sich fälschlicher Weise für die größere W' entscheidet?

Verwenden Sie die Computertabelle für die Binomialverteilung.

- c. Wie viele Versuche müssen Sie durchführen, damit die 2σ -Umgebung für die kleinere

W' von der 2σ -Umgebung für die größere W' getrennt ist? (Da wir hierfür keine Regel hergeleitet haben, sollen Sie n von Grund auf bestimmen. Beginnen Sie bei der Mathematisierung der Bedingung „Die beiden 2σ -Umgebungen liegen gerade nebeneinander“)

- d. Finden Sie für die in c. ermittelte Versuchszahl eine angemessene Entscheidungsregel.

4. Sie haben folgende Messtabelle:

x	-1	1	3	5	6	10
y	1	2	5	6	7	9

- a. Erzeugen Sie mit dem Computer ein Diagramm mit Ausgleichsgerade. Lassen Sie sich auch die Gleichung der Ausgleichsgeraden anzeigen.
 b. Berechnen Sie händisch die Ausgleichsgerade.
 c. Vergleichen Sie Ihre Rechnung mit der des Computers.
5. Für die 180 Studierenden der Mathematik sollen in der Universität Arbeitsplätze eingerichtet werden. Man schätzt, dass die Studierenden mit einer W' $p = 0,185$ in der Uni anwesend sind und arbeiten wollen. (Tatsächlich schwankt diese W' im Laufe des Tages erheblich, so dass diese Rechnung nur ein stark vereinfachtes Modell ist.)
 a. Es werden 35 Arbeitsplätze eingerichtet. Wie groß ist die W', dass diese nicht ausreichen?
 b. Wie viele Arbeitsplätze muss man einrichten, damit die Anzahl mit einer W' von 95% auch ausreicht?

6. Eine abstrakte Aufgabe

Für ein Zufallsexperiment kann die Zufallsvariable X die Werte $k = 1$ bis 30 annehmen.

Für die Wahrscheinlichkeitsverteilung gilt $P(X = k) = \frac{k^2}{C}$ wobei C eine passend zu wählende Konstante ist.

- a. Berechnen Sie die Konstante C .
 b. Berechnen Sie den Erwartungswert $E(X)$.
 c. Berechnen Sie die Standardabweichung σ .

Nützliche Formeln: $\sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2}n(n+1)$ $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left[\frac{1}{2}n(n+1) \right]^2 \quad \sum_{k=1}^n k^4 = \frac{1}{30}n(n+1)(6n^3 + 9n^2 + n - 1)$$