Sommersemester 2011
Dr. Reimund Albers

Stochastik
für Elementarmathematik in FBW

9. Übung
Wahrscheinlichkeitsverteilung, Zufallsgröße

Präsenzübungen (für 7.-9.6.)

1. In einem Zufallsexperiment wird ein Grundexperiment mit der Trefferw' p wiederholt. Es sei X die Anzahl der Versuche bis zum ersten Treffer. Dann ist X geometrisch verteilt, es gilt also $P(X{=}k) = p\left(1-p\right)^{k-1}$. In der letzten Übung haben Sie gezeigt, dass die Summe der W' 1 ist.

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X) &= \sum_{k=1}^{\infty} kp(1-p)^{k-1} \quad (1)\\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)p(1-p)^{k} \quad (2)\\ &= \sum_{k=0}^{\infty} kp(1-p)^{k} + \sum_{k=1}^{\infty} p(1-p)^{k-1} \quad (3)\\ &= (1-p)\mathrm{E}(X)+1 \quad (4)\end{aligned}$$

Also gilt: $\mathrm{E}(X) = (1-p)\mathrm{E}(X)+1 = \mathrm{E}(X) - p\,\mathrm{E}(X)+1$

$$\mathrm{E}(X) = \frac{1}{p}$$

Erläutern Sie die Umformungsschritte der obigen Rechnung.

2. Eine Zufallsgröße X nehme die aufgelisteten Werte mit der angegebenen W' an.

Werte für X: $k=$	-5	-1	2	4	6	k_6
W' für $X=k$	0,3	0,2	0,1	0,2	0,1	p_6

Berechnen Sie die fehlende W' p_6. Bestimmen Sie k_6 so, dass der Erwartungswert 0 ist. Berechnen Sie dann die Varianz $V(X)$ und Standardabweichung σ.

Hausübungen (Abgabe: Mo, 20.6., das ist erst in zwei Wochen)

3. Beim Würfelspiel „Differnz trifft" wird mit zwei Würfeln gewürfelt und die Differenz „höhere Augenzahl minus niedrigere Augenzahl" errechnet. Es sei X die erzielte Differenz. Geben Sie für X die W'verteilung in einer Tabelle an und berechnen Sie E(X), V(X) und σ. Mit welcher W' fällt X in die σ –Umgebung von E(X)?

4. In einer Urne liegen 10 weiße und 30 schwarze Kugeln. Sie ziehen 5 Kugeln ohne zurücklegen. Es sei X die Anzahl der gezogenen weißen Kugeln.
   a. Geben Sie für X die W'verteilung in einer Tabelle an.

b. Berechnen Sie aus der Tabelle unter a. E(X), V(X) und σ “zu Fuß“.
c. Berechnen Sie E(X), V(X) mit den in der Vorlesung angegebenen Formeln. Vergleichen Sie mit b.
d. Mit welcher W’ fällt X in die σ –Umgebung von E(X)?

5. In einer Urne liegen die Kugeln mit den Nummern von 1 bis 9. Es wird eine Kugel gezogen. X ist die gezogene Zahl.
   a. Sehen Sie in Ihrer Vorlesungsmitschrift nach, wie Sie in diesem Fall mit vorgefertigten Formeln E(X) und V(X) berechnen können und tun Sie das für dieses Experiment.
   b. Berechnen Sie V(X) „zu Fuß“, indem Sie die betreffende Summe berechnen.
   c. Berechnen Sie aus V(X) σ und berechnen Sie dann die W’, mit der X in die σ – Umgebung von E(X) fällt.

6. Eine Sendung von 16 äußerlich gleichen Teilen enthält ein fehlerhaftes Teil, das zu leicht ist. Ein Mitarbeiter soll das fehlerhafte Teil finden, indem er die Teile wiegt.
   a. 1. Strategie
   Alle Teile werden nacheinander auf die Waage gelegt, bis das defekte Teil gefunden wird. Berechnen Sie den Erwartungswert für die Anzahl der Wägungen, die notwendig sind.
   b. 2. Strategie
   Die 16 Teile werden in zwei gleich große Gruppen aufgeteilt. Es werden dann zwei Mal 8 Teile gleichzeitig gewogen. Die Gruppe, die zu leicht ist, wird wieder in zwei gleich große Gruppen aufgeteilt und beide gewogen. Das Halbieren und wiegen macht man so lange bis das zu leichte Teil gefunden ist. Berechnen Sie auch hier den Erwartungswert für die Anzahl der Wägungen, die notwendig sind.
   c. Welche von beiden Strategien führt auf lange Sicht mit weniger Wägungen zum Ziel?

7.
   a. Berechnen Sie für die Ziehung beim Lotto 6 aus 49 (Ziehen ohne Zurücklegen) die W’, dass Ihre Glückszahl (welche das ist, spielt für die Rechnung keine Rolle) als eine der sechs Gewinnzahlen gezogen wurde.
   b. Heute wurde die Glückszahl gezogen. Wie viele Ziehungen müssen Sie im Durchschnitt warten, bis Ihre Glückszahl wieder gezogen wird?
   c. Was sagen Sie zu folgender Lösung: „Es sind 49 Zahlen. Bei jeder Ziehung werden sechs Zahlen gezogen. Also braucht man gut acht Ziehungen, bis man einmal mit allen 49 Kugeln im Schnitt durch ist.“

8. (die theoretische Aufgabe)
   Es sei $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$ die Ergebnismenge eines Zufallsversuches und X eine Zufallsvariable, die jedem ω_i eine Zahl k_i zuordnet. Ferner ist die W’verteilung für X bekannt. Für eine beliebige reelle Zahl $a \neq 0$ ist dann aX die Zufallsvariable, die jedem ω_i die Zahl ak_i zuordnet. Für die W’verteilung gilt: $P(aX = ak_i) = P(X = k_i)$.
   a. Zeigen Sie, dass dann gilt: E(aX) = a E(X).
   (*Die Aufgabe ist leicht und kurz. Die größte Schwierigkeit besteht darin, zu verstehen,* ***was*** *man hier machen muss.*)
   b. Zeigen Sie, dass dann gilt: V(aX) = a^2 V(X). (*Das ist schon etwas trickreicher.*)