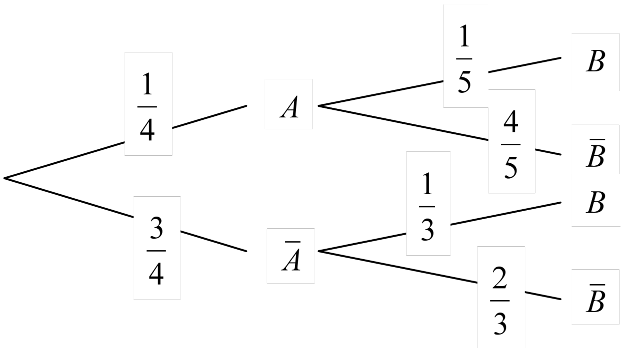
Sommersemester 2011
Dr. Reimund Albers

Stochastik
für Elementarmathematik in FBW

6. Übung
Baumdiagramme, bedingte Wahrscheinlichkeiten

Präsenzübungen (für 17.-19.5.11)

1. Gegeben ist das folgende Baumdiagramm



a. Schreiben Sie das Diagramm auf mit absoluten Zahlen bei einer Gesamtversuchszahl von 600.
b. Erstellen Sie aus den Zahlen in a. eine Vierfeldertafel.
c. Erzeugen Sie aus der Vierfeldertafel das umgekehrte Baumdiagramm
   i. mit den absoluten Zahlen
   ii. mit den Wahrscheinlichkeiten
d. Lesen Sie aus den entsprechenden Baumdiagrammen ab:
   $P(A\,|\,B)$ $P(A\,|\,\overline{B})$ $P(\overline{A}\,|\,\overline{B})$ $P(B\,|\,\overline{A})$ $P(\overline{B}\,|\,A)$
e. Wir interpretieren die gesamten Daten in dem Zusammenhang:
   A: Person ist Angehöriger einer Minderheit
   B: Person musste in den letzten zwei Jahren wegen falschen Parkens ein Bußgeld zahlen
   Wie viel Prozent der Minderheit sind Falschparker?
   Wie viel Prozent der Falschparker gehören der Minderheit an?

Hausübungen (Abgabe: Mo, 23.5.11)

2. Bei einer Prüfung sind 85% der Studierenden gut vorbereitet. Ein gut vorbereiteter Studierender kann eine Prüfungsaufgabe zu 75% richtig beantworten, ein schlecht vorbereiteter rät und hat eine Chance von 50% auf die richtige Antwort.
   a. Bei einer Prüfung wird den Studierenden eine Frage gestellt. Ist die Frage richtig beantwortet, so ist die Prüfung bestanden.
      Ein Studierender besteht die Prüfung. Mit welcher W' ist es ein gut vorbereiteter Studierender?
   b. Mit einer neuen Prüfungsordnung wird nun verlangt, dass den Studierenden drei Fragen gestellt werden und die Prüfung dann bestanden ist, wenn zwei oder drei Fragen richtig beantwortet sind.

   i. Berechnen Sie für einen gut vorbereiteten und einen nicht gut vorbereiteten Studierenden die W', die Prüfung zu bestehen, wenn die W' für das richtige Beantworten der einzelnen Fragen gleich bleibt.
   ii. Ein Studierender besteht die (neue Art der) Prüfung. Mit welcher W' ist es ein gut vorbereiteter Studierender?

3. Eine Krankheit kommt in der Bevölkerung mit einer W' von 2% vor. Der Test für die Krankheit ist zurzeit noch sehr unsicher, er zeigt nämlich sowohl für die Kranken wie auch die Gesunden ihren Zustand mit einer Sicherheit von 85% an.
   a. Der Test zeigt für eine Person das Vorhandensein der Krankheit an. Wie groß ist die W', tatsächlich krank zu sein?
   b. Die Firma möchte nun durch weitere Investitionen den Test genauer machen. Sie sollen entscheiden, ob die Investitionen eher in die genauere Indikation bei den Kranken (die Sensitivität) oder bei den Gesunden (die Spezifität) fließen soll. Rechnen Sie dazu die Situation unter a. durch, wenn die Genauigkeit
      i. für die Kranken von 85% auf 90% gesteigert wurde.
      ii. für die Gesunden von 85% auf 90% gesteigert wurde.

   Wohin sollte also die Investition fließen?

4. Bei einem Glücksspiel stehen drei Urnen bereit: Urne A enthält 2 schwarze und 8 weiße Kugeln, Urne B 3 schwarze und 7 weiße und Urne C 4 schwarze und 6 weiße. Die Urnen werden zufällig gewählt. Aus der gewählten Urne wird eine Kugel gezogen.
   Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten, dass
   a. Urne A gewählt wird und eine weiße Kugel gezogen wird.
   b. Urne C gewählt wird und eine schwarze Kugel gezogen wird.
   c. in diesem Spiel überhaupt eine schwarze Kugel gezogen wird.
   d. Man hat eine schwarze Kugel gezogen. Wie groß ist dann die W', dass man aus Urne B gezogen hat?
   e. Man hat eine weiße Kugel gezogen. Wie groß ist dann die W', dass man aus Urne C gezogen hat?

5. (die theoretische Aufgabe)
   Die formale Definition der bedingten W' ist: $P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$.
   a. Begründen Sie diese Gleichung aus dem Rechnen im Baumdiagramm.
   b. Erläutern Sie die Gleichung $P(A \mid \Omega) = P(A)$, wobei Ω wie üblich der Ergebnisraum ist. Verwenden Sie die inhaltliche Erklärung für die bedingte W': „$P(A|B)$ ist die W' für A, wenn bereits B eingetreten ist." Erläutern Sie damit inhaltlich - anschaulich die Gleichung.
   c. Berechnen und erläutern Sie analog zu b. die W' $P(A \mid \overline{A})$.
   d. Zwei Ereignisse A und B heißen unabhängig, wenn gilt: $P(A \mid B) = P(A \mid \overline{B})$.
      i. Erläutern Sie diese Aussage anschaulich.

   Für die Unabhängigkeit von A und B findet man in der Literatur die formale Definition $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.
      ii. Zeigen Sie: $P(A \mid B) = P(A \mid \overline{B}) \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$