Stochastik

für Elementarmathematik in FBW

2. Übung
Ergebnisse, Ereignisse, Mengen, Ereignisalgebra

Präsenzübungen (für Di 12., Mi 13., Do 14.4.)

1. Geben Sie für die folgenden Situationen jeweils eine möglichst einfache Ergebnismenge Ω an.
   a. Eine Münze wird zwei Mal geworfen, jede Münze kann Bild oder Zahl anzeigen.
   b. Eine Spielmarke mit den Zahlen 1 und 2 und ein Würfel werden geworfen.
   c. Eine Münze wird geworfen, bis „Kopf“ erscheint. Man achtet auf die Anzahl der notwendigen Würfe.
   d. Eine Karte wird aus einem Stapel Spielkarten gezogen. Dabei interessiert einen nur
      i. die „Farbe“ Kreuz, Pik, ...
      ii. ob es ein Ass ist oder nicht.
      iii. ob es Kreuz Bube ist oder nicht.

2. Notieren Sie die Ergebnisse zu folgenden Ereignissen. Die Ergebnismengen sollen jeweils die aus Aufgabe 1 sein:
   a. (1.a) Die beiden Münzen zeigen gleiche Ergebnisse.
   b. (1.b) Die Summe beider Zahlen ist eine Primzahl.
   c. (1.b) Das Produkt beider Zahlen ist mindestens 6.
   d. (1.c) Man muss höchstens zwei Mal werfen.

3. Mengendiagramme und Verknüpfungen, Mächtigkeiten berechnen
   a. Zeichnen Sie zu $A \cup B$, $A \cap B$, $A \subseteq B$ und $\overline{A} = \Omega \setminus A$ jeweils ein Mengendiagramm (Venn-Diagramm).
   b. In einer Klasse sind 10 Schüler in einem Fußballverein, 13 Schüler in einem Handballverein, 5 Schüler sowohl in einem Fußball- als auch Handballverein* und 4 sind in keinem solcher Vereine. Wie viele Schüler sind in der Klasse? Zeichnen Sie ein Mengendiagramm.
      *Diese Schüler werden auch bei den Angaben für einen Verein mitgezählt.
   c. Verallgemeinern Sie die Beispielaufgabe b. zur Regel: Die Anzahl der Elemente von $A \cup B$ berechnet man durch ... ?

4. Wahrscheinlichkeitsaussagen interpretieren
   Erläutern Sie über relative Häufigkeiten die Aussage. In welchem Fall ist das nicht möglich?
   a. Wenn Sie beim Roulettspiel auf eine einzelne Zahl setzen, gewinnen Sie mit der Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{37}$.
   b. Über eine Lostrommel wird gesagt: „Jedes Los gewinnt mit einer W’ von 50%.“
   c. „Die Gefährdung des Präsidenten ist hoch. Die W’ für ein Attentat beträgt zur Zeit 30%.“

Hausübungen (Abgabe: Mo, 18.4.)

5. Entscheiden Sie für jeden Satz, ob er richtig oder falsch ist.
   i. Ein Ereignis ist eine Menge von Ergebnissen.
   ii. Ein Ereignis ist eine Teilmenge von Ω.
   iii. Die σ-Algebra $\mathcal{A}$ ist eine Teilmenge von Ω.
   iv. Ω ist ein Element der σ-Algebra $\mathcal{A}$.
   v. $\varnothing$ ist ein Ereignis.

6. Ergebnismengen beschreiben
   a. In einer Urne liegen 2 schwarze, 1 weiße und 3 blaue Kugeln. Es werden drei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Geben Sie Ω als Menge von 3-Tupeln an (d.h. die Reihenfolge wird berücksichtigt).
      Zählen Sie die Ergebnisse auf, die zum Ereignis „wenigstens zwei Kugeln haben die gleiche Farbe“ gehören.
   b. Das Geschlecht der Kinder in Familien mit bis zu drei Kindern wird protokolliert in der Reihenfolge ihres Alters. Geben Sie Ω vollständig an.

7. Mengen-Diagramme bei drei Mengen
   a. In einer Klasse haben 16 Schüler eine Katze, 20 einen Hund, 14 ein Meerschweinchen, 7 einen Hund und eine Katze, 6 eine Katze und ein Meerschweinchen, 9 einen Hund und ein Meerschweinchen, und 4 alle drei Haustiere. Zeichnen Sie ein Diagramm und berechnen Sie die Anzahl der Schüler, die insgesamt in dieser Aufzählung vorkommen. *(Schüler werden hier auch mehrfach gezählt, siehe Aufgabe 3.b)*
   b. Geben Sie allgemein eine Berechnung für die Elemente von $A \cup B \cup C$ an.
   c. Leiten Sie diese Formel her aus der in 3.c gefundenen Formel für die Anzahl der Elemente in $A \cup B$.

8. Gegeben ist $\Omega = \{a,b,c,d,e\}$ und die beiden Ereignisse $E_1 = \{a\}$ und $E_2 = \{c\}$.
   a. Erweitern Sie die Menge der Ereignisse so, dass sie eine Ereignisalgebra (σ-Algebra) $\mathcal{A}$ darstellt. Vermeiden Sie, die vollständige Potenzmenge von Ω zu nehmen.
      Anleitung: Prüfen Sie für E_1, E_2 *und alle hinzukommenden Mengen, ob die drei Eigenschaften einer Ereignisalgebra erfüllt sind.*
   b. Es sei $P(E_1) = 0{,}2$ und $P(E_2) = 0{,}4$ die den Ereignisse E_1 und E_2 zugeordnete Wahrscheinlichkeit. Bestimmen Sie für alle in a. hinzugenommenen Ereignisse die Wahrscheinlichkeiten.

9. (Die abstrakte Aufgabe)
   Es seien A und B zwei Mengen einer σ-Algebra $\mathcal{A}$. Leiten Sie aus den Grundeigenschaften einer σ-Algebra her, dass dann auch $A \cap B$ ein Element der σ-Algebra $\mathcal{A}$ sein muss.