Dr. Reimund Albers Stochastik (FBW) SoSe 11

12. Übung Lösungsskizzen

Präsenzübung

1a) $\mu = n \cdot p = 3 \qquad \sigma = \sqrt{np(1-p)} = \frac{3}{2}$

$np(1-p) = \frac{9}{4}$

$3(1-p) = \frac{9}{4} \quad |:3$

$1-p = \frac{3}{4} \Rightarrow \underline{p = \frac{1}{4}}$

$\mu = n \cdot \frac{1}{4} = 3 \Rightarrow \underline{\underline{n = 12}}$

b) Die maximale W' ist $0{,}1278 = P(X=12)$

Also ist $\mu = n \cdot p = 12$

Addiert man die W' symmetrisch zu $k=12$ auf, erhält man

10:	0,1102		0,5802
11:	0,1252	9:	0,0864
12:	0,1278	15:	0,0759
13:	0,1180		0,7425
14:	0,0990		
	0,5802		

also ist $\sigma \approx 2{,}8$

$np \cdot (1-p) \approx \cancel{6{,}25}\ 7{,}84$

$12 \cdot (1-p) \approx \cancel{6{,}25}\ 7{,}84$

$1-p \approx 0{,}653$

$\underline{\underline{p \approx 0{,}347}}$

$n \approx \frac{12}{p} \approx 34{,}6$

$\underline{\underline{n = 35}}$

Probe: $P(X=12) = \binom{35}{12} 0{,}347^{12}\, 0{,}653^{23} \approx 0{,}1407$

[Tatsächlich wurde die Tabelle mit $n=60$ und $p=0{,}2$ erzeugt]

c) Lösungsweg: Ist der Abstand zwischen zwei waagerechten Linien k, so kann man alle Balkenlängen aufsummieren und kommt auf ca. $50k$. Da alle W' zusammen 1 ergeben, ist $k = \frac{1}{50} = 0{,}02$, was auch in das

1-2-5 Schema passt
Das Maximum des „Berges" liegt bei 50,
also ist $\mu = n \cdot p = 50$
Durch addieren von Balkenlängen bekommt
man heraus, dass ~~der~~ $P(44 \leq X \leq 56) \approx 72\%$.
Also ist $\sigma \approx 6$
Daraus ergibt sich mit der üblichen Rechnung
$p \approx 0{,}28$ und $n \approx 180$
[tatsächlich wurde die ~~Tabelle~~ Grafik mit $p = 0{,}333$ und
$n = 150$ erzeugt]

HAUSÜBUNGEN

2a i) Entscheidungsregel:
„Sind von den 25 getesteten Teilen 2 oder
weniger defekt, so ist die Qualität gut,
sind 3 oder mehr defekt, so ist die Qualität
regulär." (1)

ii) $p_1 = 5\% = 0{,}05$ $\quad n = 25 \Rightarrow \mu_1 = 1{,}25$
$p_2 = 15\% = 0{,}15$ $\quad \Rightarrow \mu_2 = 3{,}75$
Der Mittelwert von μ_1 und μ_2 liegt bei 2,5.
Unter dem Mittelwert → gute Qualität
über dem " → reguläre Qualität (1)

iii) Es ist $p = 0{,}05$ und man hat 3 oder
mehr defekte Teile
$P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) \approx 1 - 0{,}8729 = 0{,}1271$ (1)

Es ist $p = 0{,}15$ und man hat 2 oder
weniger defekte Teile (1)
$P(X \leq 2) \approx 0{,}2537$ (Zahlen mit Computertabelle)

b) $n = 55$

Erwartungswerte $\mu_1 = n \cdot p_1 = 55 \cdot 0{,}05 = 2{,}75$

$\mu_2 = n \cdot p_2 = 55 \cdot 0{,}15 = 8{,}25$

Mittelwert 5,5 (1)

Entscheidungsregel

„Sind von den 55 getesteten Teilen 5 oder weniger defekt, ist die Qualität gut ($p_1 = 0{,}05$), sind 6 oder mehr defekt, so ist die Qualität regulär ($p_2 = 0{,}15$)." (1)

Fehler:

$p_1 = 0{,}05$, dennoch 6 oder mehr defekt

$P(X \geq 6) = 1 - P(X \leq 5) \approx 1 - 0{,}944 = \underline{\underline{0{,}056}}$ (1)

$p_2 = 0{,}15$, dennoch nur 5 oder weniger defekt

$P(X \leq 5) \approx \underline{\underline{0{,}1479}}$ (1)

c) 25 Teile testen

Testkosten 50 €

Erwartungswert für Schaden für Fehler

$E(\text{Schaden}) = 600\,€ \cdot 0{,}1271 + 500\,€ \cdot 0{,}2537$

$\approx 203{,}11\,€$

zusammen: $\underline{\underline{253{,}11\,€}}$ (1)

55 Teile testen

Test kosten 110 €

$E(\text{Schaden}) = 600\,€ \cdot 0{,}056 + 500\,€ \cdot 0{,}1479$

$\approx 107{,}55\,€$

zusammen: $\underline{\underline{217{,}55\,€}}$

Das Test von 55 Teilen lohnt sich etwas. (1)

Man kann durch gezieltes Probieren versuchen, den optimalen Wert zu finden.

3 a. $\mu = n \cdot p = 10 \qquad \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = 2{,}5$

$$\sigma^2 = n \cdot p \cdot (1-p) = 6{,}25$$

$$10 \cdot (1-p) = 6{,}25$$

$$1-p = 0{,}625 \Rightarrow p = 0{,}375$$

$n = \dfrac{10}{0{,}375}$

$n = 26\frac{2}{3}$ (nicht ganz realistisch) 1

b. allgemein: $\sigma^2 = n \cdot p \cdot (1-p) = \mu(1-p)$

$$1-p = \frac{\sigma^2}{\mu} \qquad p = 1 - \frac{\sigma^2}{\mu}$$

Da $p \in [0;1]$, muss $\frac{\sigma^2}{\mu} \leq 1$. Also gilt $\sigma^2 \leq \mu$.
Will man den wenig sinnvollen Fall $p=0$ auch noch ausschließen, ergibt sich $\sigma^2 < \mu$. 2

c. Arbeiten wir mit den (groben Schätzungen)

$P(\mu-\sigma \leq k \leq \mu+\sigma) \approx 70\%$ und

$P(\mu-2\sigma \leq k \leq \mu+2\sigma) \approx 96\%$

$\Rightarrow P(k \leq \mu+\sigma) \approx 85\%$ und

$P(k \leq \mu+2\sigma) \approx 98\%$

Der Spalte ~~alles~~ der kumulierten W' entnimmt man: $\mu+\sigma \approx 26 \qquad \mu+2\sigma \approx 30{,}5$

Daraus ergibt sich $\sigma \approx 4{,}5 \qquad \mu \approx 21{,}5$

und mit den üblichen Rechnungen $p \approx 0{,}06$

und $n \approx 369{,}8 \approx 370$ 2

Die Werte unterliegen erheblichen Rundungsungenauigk.

[tatsächlich wurde die Tabelle mit $n=89$ und $p=0{,}25$ erstellt, also $\mu = 22{,}25$ und $\sigma \approx 4{,}1$]

4\. a. Argumentation über die Erwartungswerte: sehr guter Kand. $\mu_2 = n \cdot p_2 = 30 \cdot 0{,}95 = 28{,}5$

schwacher Kandidat:

$\mu_1 = n \cdot p_1 = 30 \cdot 0{,}6 = 18$ Mittelwert $\rightarrow 23{,}25$

Also wird man 24 oder mehr richtige Antworten fordern. (= 6 oder weniger Fehler) 1

b. $n = 30 \quad p_2 = 0{,}95$

$P(\text{richt. Antw} \geq 24) = 1 - P(\ldots \leq 23)$

$\approx 1 - 0{,}0003 = 0{,}9997$

Der sehr gute Kandidat besteht mit einer W' von über 99% 1

c. $n = 30 \quad p_1 = 0{,}60$

$P(\text{richtige Antw} \leq 23) \approx 0{,}9828$

Der schwache Kandidat fällt mit einer W' von gut 98% durch 1

d. (Probieren mit der Tabelle:)

$p = 0{,}78$ liefert $P(\text{richt. Antw.} \leq 23) \approx 0{,}5008$

Also: Ein Kandidat mit einer Sicherheit von ca 78% pro Einzelaufgabe hat eine W' von ca. 50%, den Test zu bestehen

<u>alternative Lösung</u>:

Für die gesuchte W' p sollte der Erwartungswert $n \cdot p$ bei 23,5 liegen

$n \cdot p = 23{,}5 \qquad p = \frac{23{,}5}{30} \approx \underline{0{,}783}$ 1

Zusammenst.:	A2	A3	A4	A5	Σ
	10	5	4	2	21

5. (Ausführliche Rechnung, Sie können die Rechnung aber auch auf Grund der Herleitung in der Vorlesung abkürzen)

6

Gegeben $p_1 = \frac{1}{5} = 0{,}2 \qquad p_2 = \frac{3}{8} = 0{,}375$

Trennungsbedingung: $\mu_1 + \sigma_1 = \mu_2 - \sigma_2$

$$n p_1 + \sqrt{n p_1 q_1} = n p_2 - \sqrt{n p_2 q_2} \quad \Big| : \sqrt{n}$$

$$\sqrt{n}\, p_1 - \sqrt{n}\, p_2 = -\sqrt{p_1 q_1} - \sqrt{p_2 q_2}$$

$$\sqrt{n} = \frac{\sqrt{p_1 q_1} + \sqrt{p_2 q_2}}{p_2 - p_1}$$

$$= \frac{\sqrt{0{,}2 \cdot 0{,}8} + \sqrt{0{,}375 \cdot 0{,}625}}{0{,}375 - 0{,}2}$$

$$\sqrt{n} \approx 5{,}05$$

$$n \approx 25{,}5$$

Man muss also (nur) 26 Würfe machen, um die beiden Möglichkeiten deutlich zu unterscheiden.

2

<u>alternative Lösung</u> zu 3c.

In Spalte 2 sind einige Werte für $P(X=k)$ gegeben

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$\Rightarrow \frac{P(X=k+1)}{P(X=k)} = \frac{n!\; p^{k+1} (1-p)^{n-k-1}}{(k+1)!\,(n-k-1)!} \cdot \frac{k!\,(n-k)!}{n!\; p^k (1-p)^{n-k}}$$

$$= \frac{(n-k)\cdot p}{(k+1)\cdot(1-p)}$$

angewendet auf 24 u. 25: $(k=24)$ $\quad \frac{n-24}{25} \cdot \frac{p}{1-p} = \frac{752}{867}$

angewendet auf 30 u. 31 $(k=30)$ $\quad \frac{n-30}{31} \cdot \frac{p}{1-p} = \frac{105}{166}$

Division beider Gleichungen $\quad \frac{n-24}{25} \cdot \frac{31}{n-30} = \frac{752}{867} \cdot \frac{166}{105}$

<u>Lösung</u> $n \approx 86{,}7$ also $n = 87$