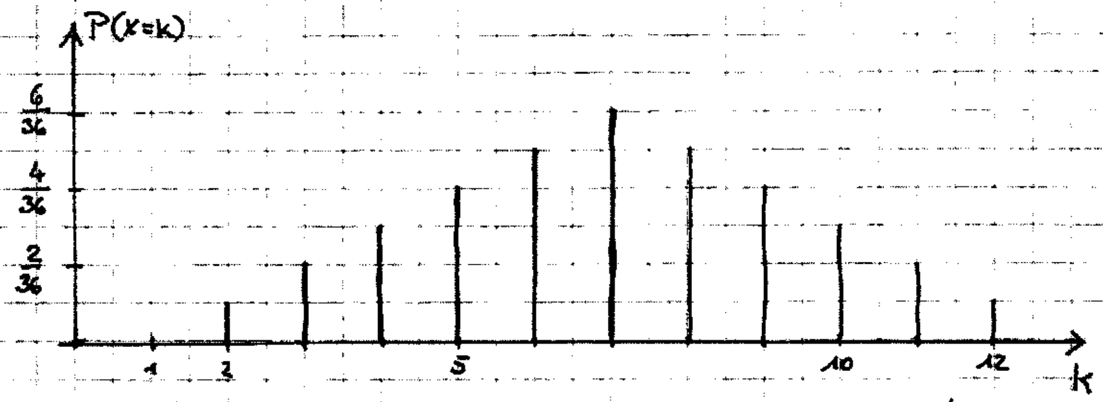
11. Übung Lösungsskizzen

1.

Werte für X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P(X= ...)	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$



$$E(X) = 2\cdot\frac{1}{36} + 3\cdot\frac{2}{36} + \dots 7\cdot\frac{6}{36} + 8\cdot\frac{5}{36} + \dots + 12\cdot\frac{1}{36}$$

$$= \frac{1}{36}\left(2+6+12+20+30+42+40+36+30+22+12\right)$$

$$= \frac{1}{36}(252) = 7$$

$$V(X) = (2-7)^2\cdot\frac{1}{36} + (3-7)^2\cdot\frac{2}{36} + \dots + (7-7)^2\cdot\frac{6}{36} + \dots + (12-7)^2\cdot\frac{1}{36}$$

$$= \frac{1}{36}\left(25\cdot 1 + 16\cdot 2 + 9\cdot 3 + 4\cdot 4 + 1\cdot 5 + 0\cdot 6 + 1\cdot 5 + 4\cdot 4 + 9\cdot 3 + 16\cdot 2\right)$$

$$= \frac{1}{36}\cdot 210 = \frac{35}{6}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{35}{6}} \approx 2{,}42$$

Im Intervall $[7-2{,}42\,;\,7+2{,}42]$ liegen die Werte $k=5,6,7,8,9$.
Die Summe der zugehörigen W' ist $\frac{1}{36}(4+5+6+5+4)$
$= \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$

2. Probieren mit $n = 2, 3, 4, 5$ legt nahe, die Fälle n gerade und n ungerade zu unterscheiden

<u>n gerade</u> Ziehen ohne Zurücklegen ohne B.d.R. $\Rightarrow |\Omega| = \frac{1}{2}n(n-1)$

Werte für X	3	4	5	6	...	n	$n+1$	$n+2$	...	$2n-2$	$2n-1$
P(X= ...)	$\frac{1}{\lvert\Omega\rvert}$	$\frac{1}{\lvert\Omega\rvert}$	$\frac{2}{\lvert\Omega\rvert}$	$\frac{2}{\lvert\Omega\rvert}$		$\frac{\frac{n}{2}-1}{\lvert\Omega\rvert}$	$\frac{\frac{n}{2}}{\lvert\Omega\rvert}$	$\frac{\frac{n}{2}-1}{\lvert\Omega\rvert}$		$\frac{1}{\lvert\Omega\rvert}$	$\frac{1}{\lvert\Omega\rvert}$

Auf Grund der Symmetrie der W'en ist der Erwartungswert der mittlere aller möglichen Werte, also $\underline{\underline{E(X) = \mu = n+1}}$.

$\underline{n \text{ ungerade}}$ $\quad |\Omega| = \frac{1}{2} n(n-1)$

Werte für X	3	4	5	6	…	$n-1$	n	$n+1$	$n+2$	$n+3$	…	$2n-1$
$P(X=\dots)$	$\frac{1}{\lvert\Omega\rvert}$	$\frac{1}{\lvert\Omega\rvert}$	$\frac{2}{\lvert\Omega\rvert}$	$\frac{2}{\lvert\Omega\rvert}$		$\frac{\frac{n-3}{2}}{\lvert\Omega\rvert}$	$\frac{\frac{n-1}{2}}{\lvert\Omega\rvert}$	$\frac{\frac{n-1}{2}}{\lvert\Omega\rvert}$	$\frac{\frac{n-1}{2}}{\lvert\Omega\rvert}$	$\frac{\frac{n-3}{2}}{\lvert\Omega\rvert}$		$\frac{1}{\lvert\Omega\rvert}$

n erzielt man durch $(1;n-1), (2;n-2), \dots \left(\frac{n-1}{2}; \frac{n+1}{2}\right)$

$n+1$ " " " $(1;n), (2;n-1), \dots \left(\frac{n-1}{2}; \frac{n+3}{2}\right)$

$n+2$ " " " $(2;n), (3;n-1), \dots \left(\frac{n-1}{2}; \frac{n+5}{2}\right), \left(\frac{n+1}{2}; \frac{n+3}{2}\right)$

Auf Grund der Symmetrie ist $E(X) = \mu = (n+1)$

HAUSÜBUNGEN

3. a. In der Tabelle einstellen $p = 0{,}19$ $\quad n = 38$

ablesen bei $k = 9$: $P(X=9) \approx \underline{\underline{0{,}1167}}$ (1)

b. $p = 0{,}4$ $\quad n = 75$

„wenigstens 31" heißt $k = 31, 32, 33, \dots, 75$

$P(X \geq 31) = 1 - P(X \leq 30)$

bei $k = 30$ den kumulierten Wert ablesen

$\approx 1 - 0{,}5499 \approx \underline{\underline{0{,}4501}}$ (1)

c. $p = 0{,}591$ $\quad n = 103$

$\mu = E(X) = n \cdot p \approx 60{,}9 \quad \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} \approx 4{,}99$

Dann ist

$\mu - 1{,}5\sigma \approx 53{,}4 \qquad \mu + 1{,}5\sigma \approx 68{,}4$

$P(53{,}4 \leq X \leq 68{,}4) = P(X \leq 68) - P(X \leq 53)$

in der Spalte „kumuliert" ablesen

$\approx 0{,}9381 - 0{,}0705 \approx \underline{\underline{0{,}8676}}$ (2)

Aufgabe 4

k	P(X=k)	kumuli…		1	2	3	4	5	6	7	8	9	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
0	0.1116	0.1116	..	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X											
1	0.2685	0.3801	..	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
2	0.2961	0.6762	..	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
3	0.1979	0.8741	..	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X			
4	0.0893	0.9634	..	X	X	X	X	X	X	X	X														
5	0.0286	0.992	..	X	X																				
6	0.0067	0.9987	..																						
7	0.0012	0.9998	..																						
8	0.0001	1	..																						
9	0	1	..																						
10	0	1	..																						
11	0	1	..																						
12	0	1	..																						

S = 2													
X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
A	0		4	4									
P(A=...)	0,3801		0,2961	1 – 0,6762 = 0,3238									

$E(A) = 0\cdot 0{,}3801 + 4\cdot 0{,}2961 + 4\cdot 0{,}3238 = 2{,}4769$

S = 3													
X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
A	0			9	6								
P(A=...)	0,6762			0,1979	1 – 0,8741 = 0,1259								

$E(A) = 0\cdot 0{,}6762 + 9\cdot 0{,}1979 + 6\cdot 0{,}1259 = 2{,}5365$

S = 4													
X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
A	0				16	8							
P(A=...)	0,8741				0,0893	1 – 0,9634 = 0,0366							

$E(A) = 0\cdot 0{,}8741 + 16\cdot 0{,}0893 + 6\cdot 0{,}0366 = 1{,}7216$

S = 5													
X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
A	0					25	10						
P(A=...)	0, 9634					0,0286	1 – 0,9920 = 0,0080						

$E(A) = 0\cdot 0{,}9634 + 25\cdot 0{,}0286 + 10\cdot 0{,}0080 = 0{,}7950$

Eine Schätzung von 3 Sechsen ist für dieses Spiel die günstigste Strategie, da dabei der höchste Erwartungswert erreicht wird. Man erhält zwar nichts in etwa zwei Drittel aller Spiele. Dafür ist die Auszahlung beim Gewinn aber entsprechend höher als wenn man S = 2 wählt.

Für größere S wirkt sich die immer größer werdende W' für die Auszahlung Null aus.

5 a) $n = 10 \quad p = 0{,}3$

$\mu = 3 \quad \sigma \approx 1{,}45 \quad \mu - \sigma \approx 1{,}55 \quad \mu + \sigma \approx 4{,}45$

$P(2 \leq X \leq 4) \approx 0{,}8497 - 0{,}1493 \approx 0{,}7004$

b) $n = 40 \quad p = 0{,}3$

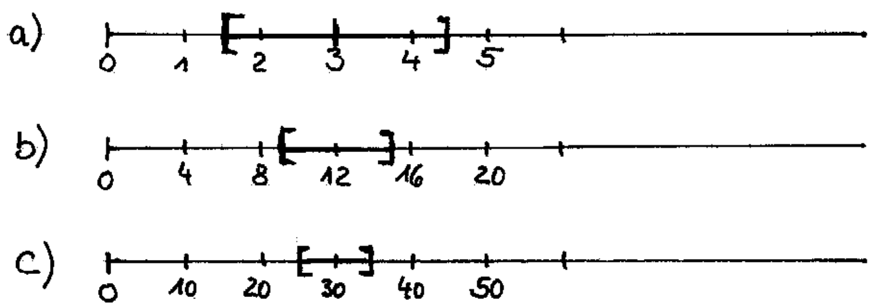
$\mu = 12 \quad \sigma \approx 2{,}90 \quad \mu - \sigma \approx 9{,}1 \quad \mu + \sigma \approx 14{,}9$

$P(10 \leq X \leq 14) \approx 0{,}8074 - 0{,}1959 \approx 0{,}6115$

c) $n = 100 \quad p = 0{,}3$

$\mu = 30 \quad \sigma \approx 4{,}58 \quad \mu - \sigma \approx 25{,}42 \quad \mu + \sigma \approx 34{,}58$

$P(26 \leq X \leq 34) \approx 0{,}8371 - 0{,}1631 \approx 0{,}6740$



3

d) <u>Absolut</u> wird σ, die Breite (2σ) der Intervalle, größer (Rechnung oben). <u>Relativ</u> werden die σ-Umgebungen kleiner. 1

6 a) 2% Zinsen: 50.000 · 1,02 = 51.000

Da die Zahlung sicher ist, ist der Erwartungswert auch 51.000 1

b) 50.000 —(0,9)→ +8% → 54.000

50.000 —(0,1)→ −50% → 25.000

E(Geld)

= 54.000 · 0,9 + 25.000 · 0,1

= 51.100 1

c) 0 Flops $50.000 \cdot 1{,}08 = 54.000$

$P(0 \text{ Flops}) = 0{,}9^5 \approx 0{,}5905$

1 Flop $\left.\begin{array}{l} 40.000 \cdot 1{,}08 = 43.200 \\ 10.000 \cdot 0{,}5 = 5.000 \end{array}\right\} 48.200$

$P(1 \text{ Flop}) \approx 0{,}3281$

2 Flops $\left.\begin{array}{l} 30.000 \cdot 1{,}08 = 32.400 \\ 20.000 \cdot 0{,}5 = 10.000 \end{array}\right\} 42.400$

$P(2 \text{ Flops}) \approx 0{,}0729$

3 Flops $\left.\begin{array}{l} 20.000 \cdot 1{,}08 = 21.600 \\ 30.000 \cdot 0{,}5 = 15.000 \end{array}\right\} 36.600$

$P(3 \text{ Flops}) \approx 0{,}0081$

4 Flops $\left.\begin{array}{l} 10.000 \cdot 1{,}08 = 10.800 \\ 40.000 \cdot 0{,}5 = 20.000 \end{array}\right\} 30.800$

$P(4 \text{ Flops}) \approx 0{,}0005$

5 Flops laut Tabelle W' ist 0
(tatsächlich $0{,}1^5 = 0.00001$)

$E(\text{Geld}) \approx 54.000 \cdot 0{,}5905 + 48.200 \cdot 0{,}3281 + 42.400 \cdot 0{,}0729$
$+ 36.600 \cdot 0{,}0081 + 30.800 \cdot 0{,}0005$
≈ 51.104 (ohne Rundungsfehler genau 51.100)

3

Vorteil: Die W' für einen großen Verlust ist sehr klein. In b. sind es 10%

Nachteil: Die W', dass man einen Verlust erleidet, ist immerhin 40%.

b. und c. unterscheiden sich vom Erwartungswert <u>nicht</u>.

Aufg	3	4	5	6	Σ
	4	4	4	5	17