Dr. Reimund Albers   Stochastik (BA FBW)   SoSe 11

9. Übung, Lösungsskizzen

1. (1) ist der direkte Ansatz für den E-Wert, also
   Wert der Zufallsgröße · zugehöriger W'

   (1) → (2) Indextransformation $k=1 \to k=0$ um 1 verringert,
   als muss in der Formel k durch $k+1$ ersetzt werden

   (2) → (3) $(k+1)$ wird ausmultipliziert und auf zwei Summen aufgeteilt

   (3) → (4) 1. Summe: $\sum_{k=0}^{\infty} kp(1-p)^k = (1-p) \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} kp(1-p)^{k-1}}_{(1) \text{ ist } E(X)}$

   2. Summe: Summe aller W' ist 1

   Am Ende wird die Gleichung $E(X) = (1-p)E(X) + 1$ nach $E(X)$ aufgelöst.

2. Berechnung von p_6: $0{,}3 + 0{,}2 + 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}1 + p_6 = 1$

$$\Rightarrow p_6 = 0{,}1$$

$$E(X) = -5 \cdot 0{,}3 + (-1) \cdot 0{,}2 + 2 \cdot 0{,}1 + 4 \cdot 0{,}2 + 6 \cdot 0{,}1 + k_6 \cdot 0{,}1 = 0$$

$$-1{,}5 - 0{,}2 + 0{,}2 + 0{,}8 + 0{,}6 + k_6 \cdot 0{,}1 = 0$$

$$-0{,}1 + k_6 \cdot 0{,}1 = 0$$

$$\underline{\underline{k_6 = 1}}$$

$$V(X) = 25 \cdot 0{,}3 + 1 \cdot 0{,}2 + 4 \cdot 0{,}1 + 16 \cdot 0{,}2 + 36 \cdot 0{,}1 + 1 \cdot 0{,}1$$

$$= 7{,}5 + 0{,}2 + 0{,}4 + 3{,}2 + 3{,}6 + 0{,}1 = \underline{\underline{15}}$$

$$\sigma = \sqrt{15} \approx \underline{\underline{3{,}87}}$$

HAUSÜBUNGEN

3.

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

x_i	0	1	2	3	4	5
$P(X=x_i)$	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$

1

$$E(X) = 1\cdot\frac{10}{36} + 2\cdot\frac{8}{36} + 3\cdot\frac{6}{36} + 4\cdot\frac{4}{36} + 5\cdot\frac{2}{36}$$
$$= \frac{1}{18}(5+8+9+8+5)$$
$$= \frac{35}{18} \approx 1{,}94$$

1

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$
$$= \frac{1}{18}(1\cdot 5 + 4\cdot 4 + 9\cdot 3 + 16\cdot 2 + 25\cdot 1) - \left(\frac{35}{18}\right)^2$$
$$= \frac{665}{324} \approx 2{,}05$$
$$\sigma = \sqrt{V(X)} \approx 1{,}43$$

1

σ-Umgebung von $E(X)$:

$E(X)-\sigma \approx 0{,}51 \qquad E(X)+\sigma \approx 3{,}37$

$$P(E(X)-\sigma \le X \le E(X)+\sigma) = P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)$$
$$= \frac{1}{18}(5+4+3) = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$$

Mit einer W' von $\frac{2}{3}$ liegen die Werte von X in der σ-Umgebung von $E(X)$.

1

4. a) Hypergeometrische Verteilung

$$P(X=0) = \frac{\binom{10}{0}\binom{30}{5}}{\binom{40}{5}} \approx 0{,}217$$

$$P(X=1) = \frac{\binom{10}{1}\binom{30}{4}}{\binom{40}{5}} \approx 0{,}416$$

noch 4a

$$P(X=2) = \frac{\binom{10}{2}\binom{30}{3}}{\binom{40}{5}} \approx 0{,}278$$

$$P(X=3) = \frac{\binom{10}{3}\binom{30}{2}}{\binom{40}{5}} \approx 0{,}079$$

$$P(X=4) = \frac{\binom{10}{4}\binom{30}{1}}{\binom{40}{5}} \approx 0{,}010$$

$$P(X=5) = \frac{\binom{10}{5}}{\binom{40}{5}} \approx 0{,}0004$$

x_i	0	1	2	3	4	5
$P(X=x_i)$	0,217	0,416	0,278	0,079	0,010	0,0004

1

b) $E(X) = \sum_{i=0}^{5} i \cdot P(X=x_i) \approx 1{,}25$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$
$$= \sum_{i=0}^{5} i^2 \cdot P(X=x_i) - 1{,}25^2$$
$$\approx 0{,}847 \qquad \sigma = \sqrt{V(X)} \approx 0{,}92$$

1

c) $E(X) = n \cdot \frac{a}{a+b} \qquad n=5 \quad a=10 \quad b=30$

$$= 5 \cdot \frac{10}{40} = \frac{5}{4} = 1{,}25 \qquad \text{stimmt}$$

$$V(X) = n \cdot \frac{a}{a+b} \cdot \frac{b}{a+b} \cdot \frac{a+b-n}{a+b-1} = 5 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{35}{39}$$

$\approx 0{,}841$ stimmt

1

d) $E(X) - \sigma \approx 0{,}33 \qquad E(X) + \sigma \approx 2{,}17$

$$P(E(X) - \sigma \le X \le E(X) + \sigma) = P(X=1) + P(X=2)$$
$$\underline{\approx 0{,}694}$$

1

5) Gleichverteilung

a) Werte für X: $1, 2, 3, \ldots, 9$ $\quad P(X=x_i)=\frac{1}{9}$ $(n=9)$

$$E(X) = \frac{n+1}{2} = 5$$

$$V(X) = \frac{n^2-1}{12} = \frac{80}{12} = \frac{20}{3} \approx 6{,}7$$ 1

b) $$E(X) = \sum_{i=1}^{9} i \cdot P(X=i) = \frac{1}{9} \cdot \sum_{i=1}^{9} i = \frac{1}{9} \cdot \frac{9 \cdot 10}{2} = \underline{\underline{5}}$$

stimmt

$$V(X) = \sum_{i=1}^{9} (i-5)^2 \cdot P(X=i)$$

$$= \frac{1}{9}(16+9+4+1+0+1+4+9+16)$$

$$= \frac{60}{9} = \underline{\underline{\frac{20}{3}}}$$ stimmt 1

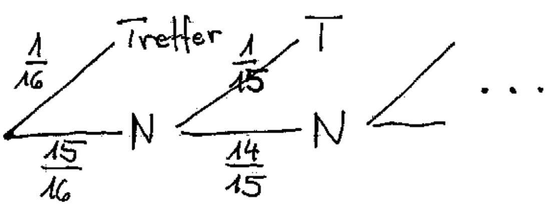
c) $$\sigma = \sqrt{V(X)} \approx 2{,}58$$

$$E(X) - \sigma \approx 2{,}42 \qquad E(X) + \sigma \approx 7{,}58$$

$$P(E(X)-\sigma \leq X \leq P(X)+\sigma) = P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)$$
$$+P(X=6)+P(X=7)$$

$$= \frac{5}{9} \approx 55{,}6\,\%$$ 1

6) a) Beginnt man ein Baumdiagramm, erhält man



$$P(X=1) = \frac{1}{16} \qquad P(X=2) = \frac{15}{16} \cdot \frac{1}{15} = \frac{1}{16} \quad \ldots$$

Also Gleichverteilung mit $n = 16$

$$E(X) = \frac{16+1}{2} = 8{,}5$$

Man braucht auf lange Sicht im Schnitt 8,5 Wägungen, um das defekte Teil zu finden. 1

6 b) Mit jeder Wägung halbiert man die Menge der zu testenden Teile

$$16T \xrightarrow{1.\text{Wäg.}} 8T \xrightarrow{2.\text{W.}} 4T \xrightarrow{3.} 2T \xrightarrow{4.} 1T$$

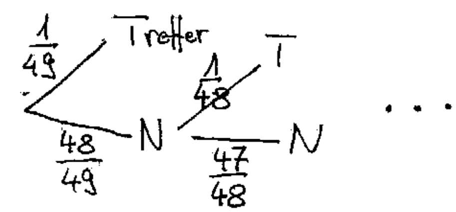
Man muss in jedem Fall 4 Wägungen machen.

Also ist hier $E(X) = 4$

c) Die Strategie 2 ist auf lange Sicht die bessere, da der Erwartungswert für die Anzahl der Wägungen geringer ist.

b. und c. 2

7 a. Baumdiagramm



Ebenso wie bei 6a

$$P(\text{Treffer}) = \frac{1}{49} + \frac{48}{49}\cdot\frac{1}{48} + \dots + \frac{48}{49}\cdot\frac{47}{48}\cdot\frac{46}{47}\cdots\frac{1}{44}$$

$$= \underline{\underline{\frac{6}{49}}}$$

1

b. X Wartezeit in Wochen

$P(X=1) = \frac{6}{49}$ $\quad P(X=k) = \left(\frac{43}{49}\right)^{k-1}\frac{6}{49}$

Formel der Vorlesung: $E(X) = \frac{1}{p} = \frac{49}{6} \approx 8{,}2$

Man muss gut 8 Wochen warten, bis die Glückszahl wieder drankommt. 1

c. Wie die Rechnung in b. zeigt, ist diese Vorstellung richtig. 1

Allgemein: Zieht man a Kugeln aus n ohne Zurücklegen, so ist die Trefferw', dass eine bestimmte Kugel unter den a gezogenen ist, $p = \frac{a}{n}$.

Der Erwartungswert für die Wartezeit ist $\frac{1}{p} = \frac{n}{a}$.

8. Gegeben $X \quad X(\omega_i) = k_i$, $P(X=k_i)$ ist bekannt

$aX \quad aX(\omega_i) = ak_i$ W'verteilung gleich

a) $E(aX) = \sum_{i=1}^{n} a \cdot k_i \cdot P(aX = ak_i)$ | konst. Faktor vor die Summe

$= a \cdot \sum_{i=1}^{n} k_i \, P(aX = ak_i)$

W'verteilung bleibt unverändert

$= a \underbrace{\sum k_i \, P(X = k_i)}$

$= a \cdot E(X)$

1

b) $V(aX) = \sum (ak_i - E(aX))^2 \cdot P(aX = ak_i)$

$\downarrow$ a)

$= \sum (ak_i - a\,E(X))^2 \cdot P(aX = ak_i)$ | a aus $(\,)^2$ ausklammern

$= \sum a^2 (k_i - E(X))^2 \cdot P(aX = ak_i)$ | a^2 vor die Summe

$= a^2 \sum (k_i - E(X))^2 \cdot P(aX = ak_i)$ | gleiche W'verteilung

$= a^2 \underbrace{\sum (k_i - E(X))^2 \cdot P(X = k_i)}$

$= a^2 \; V(X)$

2. Lösungsweg

$V(aX) = E((aX)^2) - [E(aX)]^2$ $\xrightarrow{a)}$

$\downarrow$ Def.

$= \sum (ak_i)^2 \, P(aX = ak_i) - [a \cdot E(X)]^2$

konst. vor Summe $\quad\downarrow$ gleich

$= a^2 \underbrace{\sum k_i \cdot P(X = k_i)} - a^2 \cdot E(X)^2$

$= a^2 \cdot E(X^2) - a^2 \cdot E(X)^2$ | a^2 auskl.

$= a^2 \cdot [\underbrace{E(X^2) - E(X)^2}]$

$= a^2 \; V(X)$

2

Aufg:	3	4	5	6	7	8	Σ
Punkte	4	4	3	3	3	3	20