Dr. Reimund Albers   Stochastik (FBW)   SoSe 11

8. Übung, Lösungsskizzen

1. Zu zeigen ist: $\sum_{k=0}^{\infty} p(1-p)^k = 1$

$$\sum_{k=0}^{\infty} p(1-p)^k = p \sum_{k=0}^{\infty} (1-p)^k$$ Wegen $|1-p| < 1$ gibt es einen Grenzwert (geometr. Reihe)

$$= p \frac{1}{1-(1-p)}$$

$$= p \frac{1}{p} = 1 \quad \square$$

2. $E(X) = \sum_{k \in} k \cdot P(X=k)$ Die fehlende W' $P(X=10) = 1-(0{,}3+0{,}2+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}) = \frac{1}{12}$

$$= (-2) \cdot 0{,}3 + 0 \cdot 0{,}2 + 1 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 10 \cdot \frac{1}{12}$$

$$= -0{,}6 + 0{,}25 + 0{,}5 + \frac{5}{6} = 0{,}15 + \frac{5}{6} = \frac{59}{60} \approx 0{,}983$$

HAUSÜBUNGEN

3 a. Werte k: 1 2 3 4 5 0

$P(X=k)$ —— je $\frac{1}{6}$ ——

$$E(X) = (1+2+3+4+5+0) \cdot \frac{1}{6} = \frac{15}{6} = 2{,}5$$ (1)

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{1}{6}(1+4+9+16+25) - 6{,}25$$

$$\approx 2{,}92 \qquad \sigma = \sqrt{V(X)} \approx 1{,}7$$ (1)

b) Übersichtstabelle für die Augensumme Y

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	0
2	3	4	5	6	7	0
3	4	5	6	7	8	0
4	5	6	7	8	9	0
5	6	7	8	9	10	0
6	0	0	0	0	0	0

Jede Augensumme hat die W' $\frac{1}{36}$

(1)

$$E(Y) = \left(15 + 1\cdot 5 + 15 + 2\cdot 5 + 15 + 3\cdot 5 + 15 + 4\cdot 5 + 15 + 5\cdot 5\right)\frac{1}{36} = 5\cdot 15 + 5(1+2+3+4+5)\cdot\frac{1}{36}$$

$$= \frac{150}{36} = \frac{25}{6} \approx \underline{\underline{4{,}17}}$$ (1)

$$V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2$$

$$E(Y^2) = \frac{1}{36}\cdot\left(1\cdot 4 + 2\cdot 9 + 3\cdot 16 + 4\cdot 25 + 5\cdot 36 + 4\cdot 49 + 3\cdot 64 + 2\cdot 81 + 1\cdot 100\right)$$

$$= \frac{1}{36}\cdot 1000 = \frac{250}{9}$$

$$V(Y) = \frac{125}{12} \approx 10{,}42 \qquad \sigma = \sqrt{V(Y)} \approx 3{,}2$$ (1)

4. a) Es gilt $P(G=g) = \frac{2}{g}\cdot P(G=2)$

Setze $P(G=2) = p_2$

Dann ist $P(G=5) = \frac{2}{5}p_2$, $P(G=20) = \frac{1}{10}p_2$

$P(G=50) = \frac{1}{25}p_2$

$P(G=2) + P(G=5) + P(G=20) + P(G=50) = 1$

$$\frac{77}{50}p_2 = 1$$ (1)

Also $p_2 = P(G=2) = \frac{50}{77}$

$P(G=5) = \frac{20}{77}$ $\quad P(G=20) = \frac{5}{77}$ $\quad P(G=50) = \frac{2}{77}$ (1)

b) $E(G) = 2\cdot\frac{50}{77} + 5\cdot\frac{20}{77} + 20\cdot\frac{5}{77} + 50\cdot\frac{2}{77} = \frac{400}{77} \approx 5{,}19$

d.h. im Schnitt gewinnt man mit jedem Los 5,19€ (1)

c) $3600€ : \frac{400}{77}\frac{€}{\text{Los}} = 3600\cdot\frac{77}{400}$ Lose $= 693$ Lose

Lose zu 2€ : $693\cdot\frac{50}{77} = 450 \quad \curvearrowright \quad 900€$

" 5€ : $693\cdot\frac{20}{77} = 180 \quad \curvearrowright \quad 900€$

" 20€ : $693\cdot\frac{5}{77} = 45 \quad \curvearrowright \quad 900€$

" 50€ : $693\cdot\frac{2}{77} = 18 \quad \curvearrowright \quad 900€$ (1)

$\overline{693} \qquad \overline{3600€}$

5. Gesucht sind $P(\{a\}) = w$, $P(\{b\}) = x$, $P(\{c\}) = y$ und $P(\{d\}) = z$

wegen $P(\{a,b\}) = P(\{a\}) + P(\{b\}) = w + x = 40\%$

kann man folgendes Gleichungssystem aufstellen

$$\begin{array}{lrcl}
① & w + x + y + z & = & 100\% \\
② & w + x & = & 40\% \\
③ & x + y & = & 70\% \\
④ & x + z & = & 50\%
\end{array}$$

4 Gleichungen mit 4 Unbekannten

①

$$\begin{array}{lrcl}
① & w + x + y + z & = & 100\% \\
③ & x + y & = & 70\% \\
①-② & y + z & = & 60\% \\
②+③+④-① & 2x & = & 60\%
\end{array}$$

$\Rightarrow$ $x = 30\% = P(\{b\})$

$y = 40\% = P(\{c\})$

$z = 20\% = P(\{d\})$

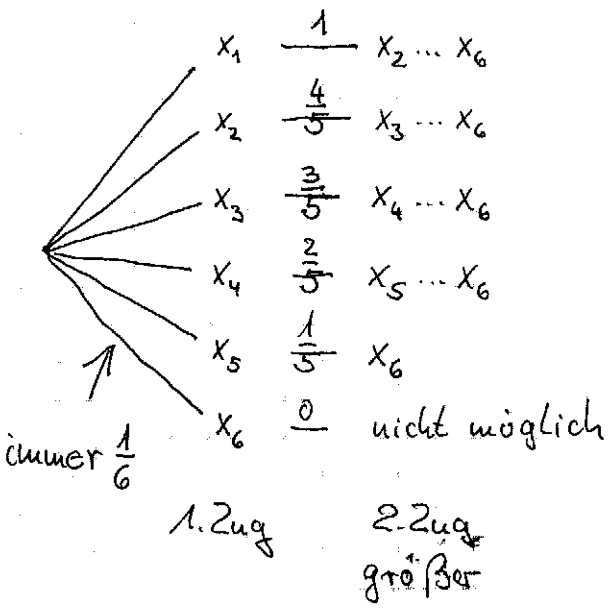
$w = 10\% = P(\{a\})$

Elem. ereig.	{a}	{b}	{c}	{d}
w'	10%	30%	40%	20%

②

6. 6 Kugeln mit den Zahlen $x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5 < x_6$

Lösung mit Baumdiagramm



P(zweite Kugel mehr)

$$= \frac{1}{6}\left(1 + \frac{4}{5} + \frac{3}{5} + \frac{2}{5} + \frac{1}{5}\right)$$

$$= \frac{1}{30} \cdot 15$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

②

Lösung mit Tafel

2. Zug höher als 1.?

1. Zug ↓ / 2. Zug →	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	X	ja	ja	ja	ja	ja
x_2		X	ja	ja	ja	ja
x_3			X	ja	ja	ja
x_4				X	ja	ja
x_5					X	ja
x_6						X

X → Zug nicht möglich

15 Erfolge von insgesamt 30 möglichen Zügen

$\Rightarrow P(\text{2. Zug mehr}) = \frac{1}{2}$

oder 2

$5 + 4 + 3 + 2 = 14$