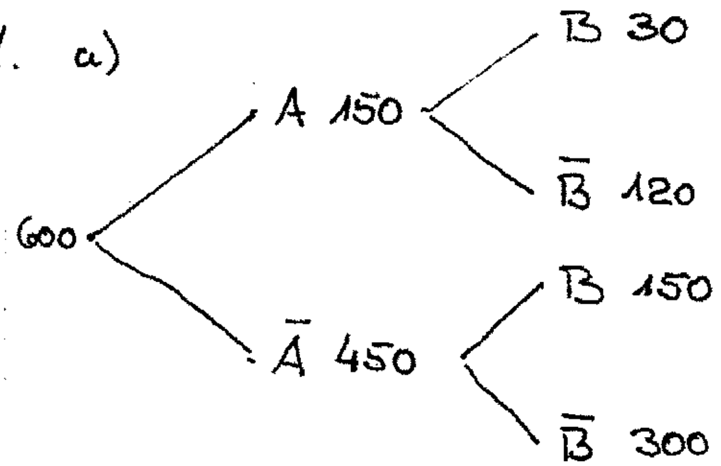
Dr. Reimund Albers Stochastik (BA FBW) SoSe 11

6. Übung Lösungsskizzen

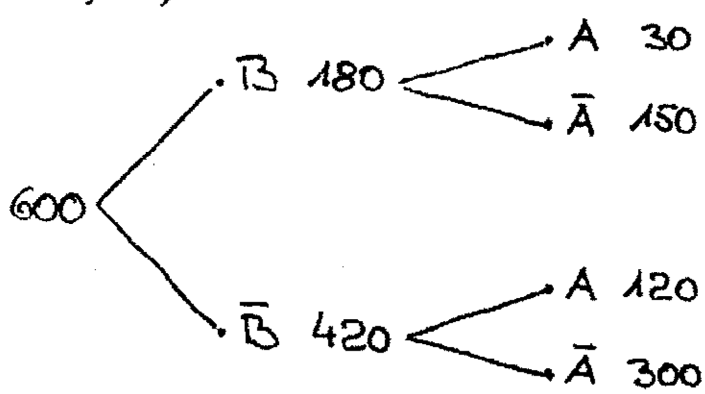
1. a)



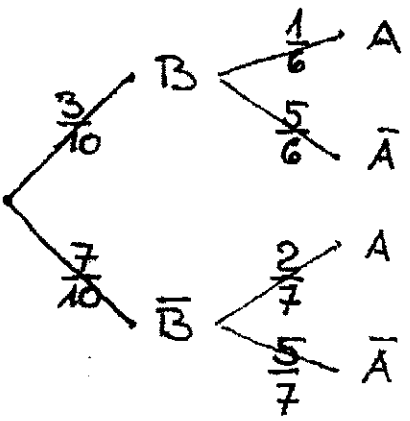
b) Vierfeldertafel

	B	$\bar{B}$	
A	30	120	150
$\bar{A}$	150	300	450
	180	420	600

c) i)



ii) Das zu c) gehörige Diagramm mit den W' erhält man, indem man für jeden Zweig die Endzahlen durch die Anfangszahlen dividiert



d) $P(A|B) = \frac{1}{6}$ $\quad P(A|\bar{B}) = \frac{2}{7}$ $\quad P(\bar{A}|\bar{B}) = \frac{5}{7}$

$P(B|\bar{A}) = \frac{1}{3}$ $\quad P(\bar{B}|A) = \frac{4}{5}$

e) Die erste Frage ist die nach

$P(B|A) = \frac{1}{5} = 20\%$ (Diagramm Aufgabe 2.)

Die zweite Frage ist die nach

$P(A|B) = \frac{1}{6} \approx 17\%$ (Diagramm c ii))

HAUSÜBUNGEN

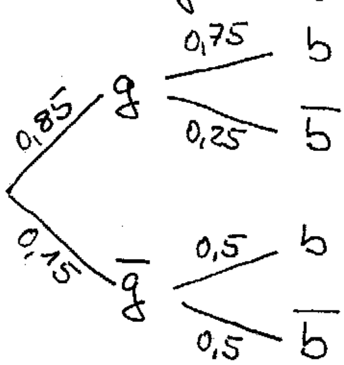
2. a) „Prüfung bestanden" = b

= „eine Frage richtig beantw."

$P(b|g) = 0{,}75$ g = „Student ist gut vorber."

$P(b|\overline{g}) = 0{,}5$

Baumdiagramm



Gesucht ist

$P(g|b)$

$$P(g|b) = \frac{P(g \cap b)}{P(b)}$$

$$P(b) = P(g \cap b) + P(\overline{g} \cap b)$$
$$= 0{,}85 \cdot 0{,}75 + 0{,}15 \cdot 0{,}5$$
$$= 0{,}7125$$

$$P(g|b) = \frac{0{,}85 \cdot 0{,}75}{0{,}7125}$$

$$\approx 0{,}895 = \underline{\underline{89{,}5\%}}$$

2

b) b = „Prüfung bestanden" = „zwei oder drei Fragen richtig beantw."

$P(b) = P(rrr) + P(rrf) + P(rfr) + P(frr)$

gut vorbereitet

$P(b|g) = 0{,}75^3 + 3 \cdot 0{,}75^2 \cdot 0{,}25 = 0{,}84375$

nicht gut vorber.

$P(b|\overline{g}) = 0{,}5^3 + 3 \cdot 0{,}5^3 = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2}$

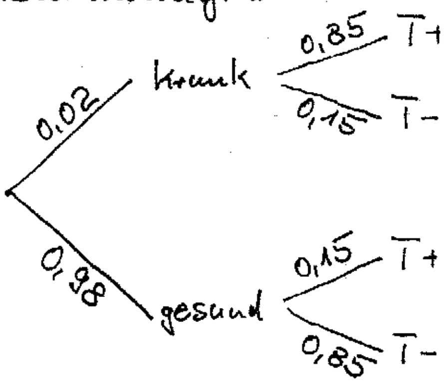
1

Rechnungen analog zu a)

$P(b) \approx 0{,}85 \cdot 0{,}844 + 0{,}15 \cdot 0{,}5 \approx 0{,}7924$

$$P(g \mid b) = \frac{0{,}85 \cdot 0{,}844}{0{,}7924} \approx 0{,}905 = \underline{\underline{90{,}5\%}}$$ 1

3. Baumdiagramm



T+ : Test zeigt Krankheit an

T− : Test zeigt keine Krankh.

1

a) Gesucht ist $P(\text{krank} \mid T+)$

$$P(\text{krank} \mid T+) = \frac{P(\text{krank und } T+)}{P(T+)}$$

$$P(T+) = 0{,}02 \cdot 0{,}85 + 0{,}98 \cdot 0{,}15 = 0{,}164$$

$$P(\text{krank} \mid T+) = \frac{0{,}02 \cdot 0{,}85}{0{,}164} \approx 0{,}104 = 10{,}4\%$$

Zeigt der Test die Krankheit an, so ist man mit einer W' von etwa 10,4% tatsächlich krank. 1

b) $P(T+ \mid \text{krank})$ von 85% auf 90%

$$P(T+) = 0{,}02 \cdot 0{,}9 + 0{,}98 \cdot 0{,}15 = 0{,}165$$

$$P(\text{krank} \mid T+) = \frac{0{,}02 \cdot 0{,}90}{0{,}165} \approx 0{,}109 = \underline{10{,}9\%}$$ 1

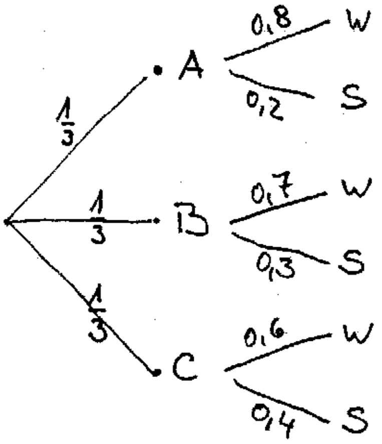
$P(T- \mid \text{gesund})$ von 85% auf 90%

$$P(T+) = 0{,}02 \cdot 0{,}85 + 0{,}98 \cdot 0{,}1 = 0{,}115$$

$$P(\text{krank} \mid T+) = \frac{0{,}02 \cdot 0{,}85}{0{,}115} \approx 0{,}148 = \underline{14{,}8\%}$$

Es lohnt sich also eher, in die genaue Erkennung der Gesunden (Spezifität) zu investieren. 1

4. Baumdiagramm



a) $P(A \cap w) = \frac{1}{3} \cdot 0{,}8$

$\approx \underline{\underline{26{,}7\%}}$ $\quad \frac{1}{2}$

b) $P(C \cap s) = \frac{1}{3} \cdot 0{,}4$

$\approx \underline{\underline{13{,}3\%}}$ $\quad \frac{1}{2}$

c) $P(s) = P(A \cap s) + P(B \cap s) + P(C \cap s)$

$= \frac{1}{3} \cdot (0{,}2 + 0{,}3 + 0{,}4) = 0{,}3 = \underline{\underline{30\%}}$ $\quad 1$

d) $P(B|s) = \frac{P(B \cap s)}{P(s)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot 0{,}3}{0{,}3} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$ $\quad \frac{1}{2}$

e) $P(C|w) = \frac{P(C \cap w)}{P(w)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot 0{,}6}{1 - 0{,}3} = \frac{0{,}2}{0{,}7} \approx \underline{\underline{28{,}6\%}}$ $\quad \frac{1}{2}$

5. a) Im Baumdiagramm hat man

$\xrightarrow{P(A)} A \xrightarrow{P(B|A)} B$

Pfadregel: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) \quad |:P(A)$

$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ $\quad 1$

In der Aufgabenstellung sind A und B vertauscht

b) Formal: $P(A|\Omega) = \frac{P(A \cap \Omega)}{P(\Omega)}$

Generell gilt: $A \cap \Omega = A$ und $P(\Omega) = 1$

also $P(A|\Omega) = \frac{P(A)}{1} = P(A)$ $\quad 1$

Inhaltlich: $\ldots|\Omega$ heißt „… wenn schon Ω eingetreten ist“. Da Ω bedeutet „alles, was eintreten kann“, ist $|\Omega$ praktisch keine Einschränkung. (1)

c) Formal: $P(A|\bar{A}) = \frac{P(A \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{P(\emptyset)}{P(\bar{A})} = \underline{\underline{0}}$

Inhaltlich: $\cancel{A \cap A}$ $\bar{A}$ ist das logische Gegenteil von A. Wenn ich schon weiß, dass $\bar{A}$ eingetreten ist, so kann A unmöglich eintreten. (1)

d) i) $P(A|B) = P(A|\bar{B})$ bedeutet, dass die W' für A gleich ist, egal ob B eingetreten ist oder nicht. Das bedeutet, dass A unabhängig von B ist. Anschaulich ist damit <u>noch nicht</u> klar, dass auch B von A unabhängig ist. (1)

ii) „$\Rightarrow$"

Es gilt: $P(A|B) = P(A|\bar{B})$

~~also~~ $\cancel{P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = P(A|\bar{B})}$

totale W': $P(A) = P(A|B) \cdot P(B) + P(A|\bar{B}) \cdot P(\bar{B})$

gleich nach Vor.

$$= P(A|B) \cdot \underbrace{\left[P(B) + P(\bar{B})\right]}_{=1}$$

$$P(A) = P(A|B)$$

Allgemein gilt $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \Big| \cdot P(B)$

$$P(A|B) \cdot P(B) = P(A \cap B)$$

$$P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B)$$

q.e.d. (2)

d) ii „⇐"

Vorauss. $P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B)$

Allgem. gilt $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \overset{\downarrow}{=} \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)} = P(A)$

$P(A|\overline{B}) = \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})}$ (*)

Für Mengen gilt: $A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$

disjunkt

Nach Kolmogorov: $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$

$\Rightarrow P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$ Voraus.

$= P(A) - P(A) \cdot P(B)$

$= P(A)[1 - P(B)]$ (1)

es gilt allgem: $P(\overline{B}) = 1 - P(B)$ (2)

(1) und (2) einsetzen in (*)

$P(A|\overline{B}) = \frac{P(A)[1-P(B)]}{1-P(B)} = P(A)$

Also gilt: $P(A|\overline{B}) = P(A) = P(A|B)$ q.e.d.

für unabhängige A,B

2

(19)

100% ≙ 15