Dr. Reimund Albers, Stochastik (FBW) SoSe 11

3. Übung Lösungen

4a. „sehr schnell" bedeutet, dass gleich die ersten beiden Züge erfolgreich sind, also eine blaue Socke liefern.

Pfad $\bullet \xrightarrow[\frac{2}{6}]{} b \xrightarrow[\frac{1}{5}]{} b$

$$P(\text{„die ersten beiden Socken blau"}) = \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{15}$$ 1

b. „besonders lange" bedeutet, dass erst die beiden letzten Züge erfolgreich sind, also eine blaue Socke liefern.

Pfad $\bullet \xrightarrow[\frac{4}{6}]{} g \xrightarrow[\frac{3}{5}]{} g \xrightarrow[\frac{2}{4}]{} g \xrightarrow[\frac{1}{3}]{} g \xrightarrow[\frac{2}{2}]{} b \xrightarrow[\frac{1}{1}]{} b$

$P(\text{„die letzten beiden Socken blau"})$

$$= \frac{\cancel{4}^{1}}{\cancel{6}_{3}} \cdot \frac{\cancel{3}^{1}}{5} \cdot \frac{\cancel{2}^{1}}{\cancel{4}_{1}} \cdot \frac{1}{\cancel{3}_{1}} \cdot 1 = \frac{1}{15}$$ 1

c. $s$ schwarze $w$ weiße $s+w$ Kugeln insges.

W', in $s$ Zügen nur schwarze Kugeln zu ziehen

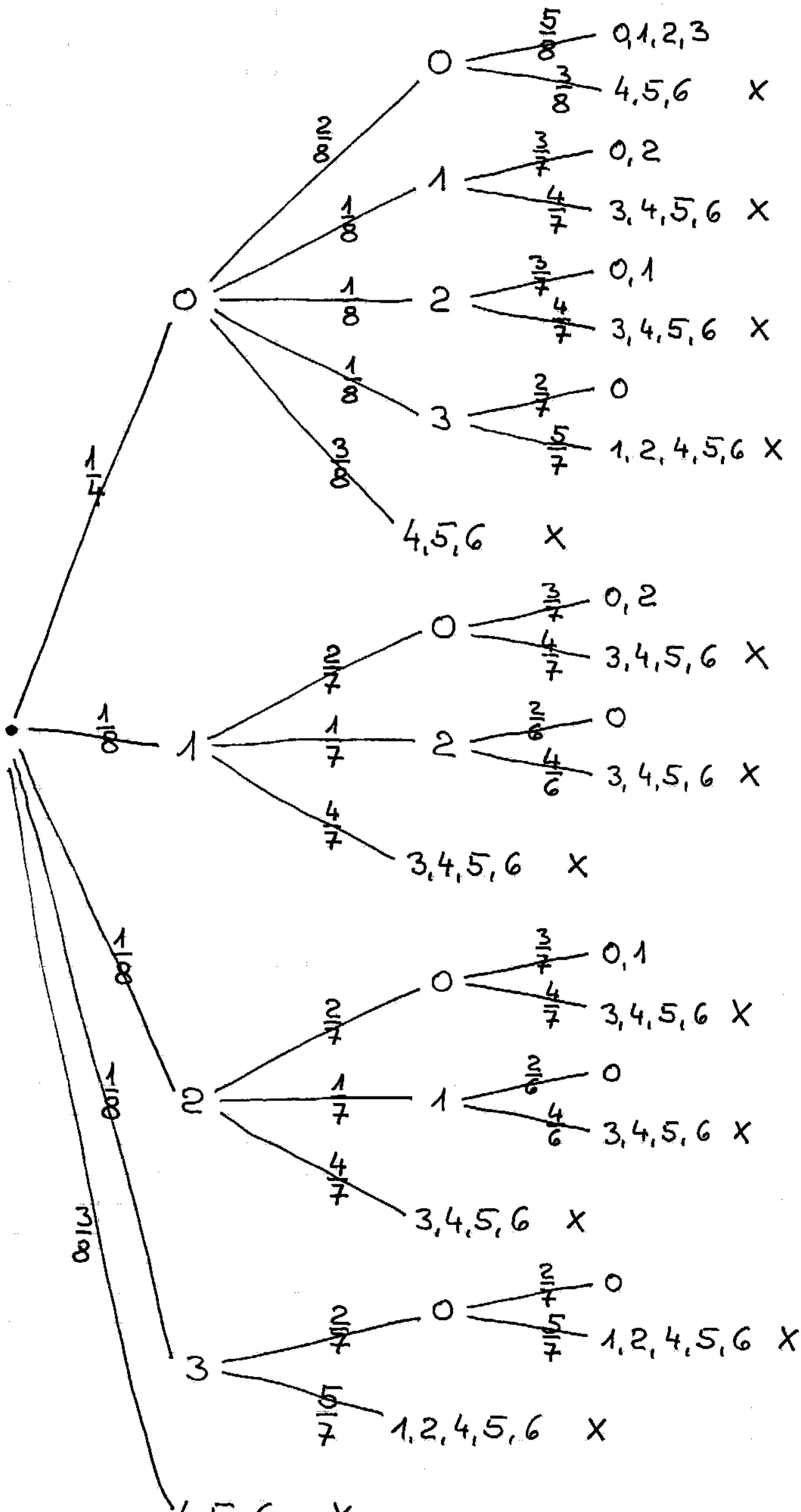
$$P(sss\ldots s) = \frac{s}{s+w} \cdot \frac{s-1}{s+w-1} \cdot \frac{s-2}{s+w-2} \cdot \ldots \frac{1}{w+1}$$

nun mit $w!$ erweitern

$$= \frac{s!\,w!}{(s+w)!}$$

$$= \frac{1}{\binom{s+w}{s}} = \frac{1}{\binom{s+w}{w}}$$ 1

5.


1/4
0
2/8
0
5/8 0,1,2,3
3/8 4,5,6 X
1/8
1
3/7 0,2
4/7 3,4,5,6 X
1/8
2
3/7 0,1
4/7 3,4,5,6 X
1/8
3
2/7 0
5/7 1,2,4,5,6 X
3/8
4,5,6 X
1/8
1
2/7
0
3/7 0,2
4/7 3,4,5,6 X
1/7
2
2/6 0
4/6 3,4,5,6 X
4/7
3,4,5,6 X
1/8
2
2/7
0
3/7 0,1
4/7 3,4,5,6 X
1/7
1
2/6 0
4/6 3,4,5,6 X
4/7
3,4,5,6 X
1/8
3
2/7
0
2/7 0
5/7 1,2,4,5,6 X
5/7
1,2,4,5,6 X
3/8
4,5,6 X

3

$P(\text{Summe ist 4 oder mehr})$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{8} + \frac{1}{8}\cdot\frac{4}{7} + \frac{1}{8}\cdot\frac{4}{7} + \frac{1}{8}\cdot\frac{5}{7} + \frac{3}{8}\right)$$

$$+ \frac{1}{8}\left(\frac{2}{7}\cdot\frac{4}{7} + \frac{1}{7}\cdot\frac{4}{6} + \frac{4}{7}\right) + \frac{1}{8}\left(\frac{2}{7}\cdot\frac{4}{7} + \frac{1}{7}\cdot\frac{4}{6} + \frac{4}{7}\right)$$

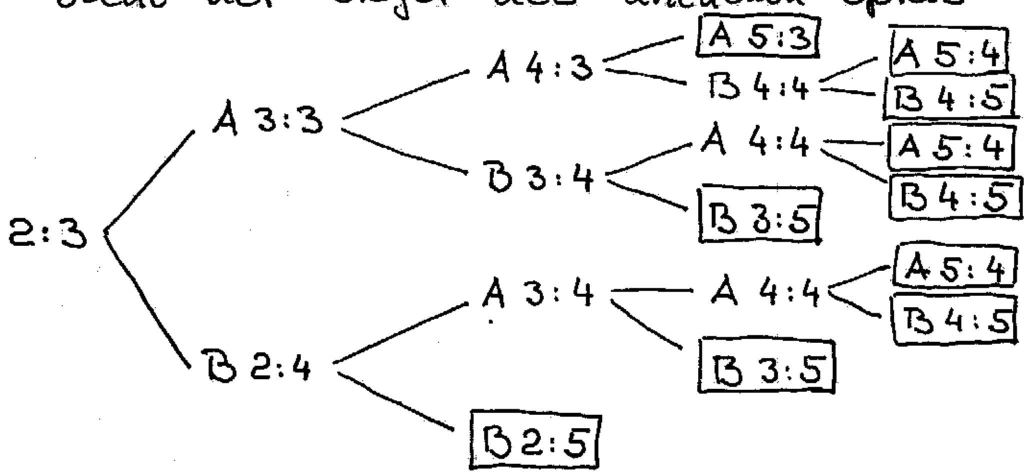
$$+ \frac{1}{8}\left(\frac{2}{7}\cdot\frac{5}{7} + \frac{5}{7}\right) + \frac{3}{8}$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{3}{32} + \frac{1}{14} + \frac{1}{14} + \frac{5}{56} + \frac{3}{8}\right)$$

$$+ \frac{1}{8}\left(\frac{8}{49} + \frac{2}{21} + \frac{4}{7}\right)\cdot 2 + \frac{1}{8}\left(\frac{10}{49} + \frac{5}{7}\right) + \frac{3}{8}$$

$$= \frac{16417}{18816} \approx 87{,}3\,\% \qquad 1$$

6. Baumdiagramm „a:b" bedeutet, dass A a Spiele und B b Spiele gewonnen hat. Vor dem Spielstand steht der Sieger des aktuellen Spiels




1

a) Gewinnw' für jede Mannschaft $\frac{1}{2}$

$$P(\text{A gewinnt}) = \underbrace{\frac{1}{8}}_{(5:3)} + \underbrace{\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}}_{(5:4)} = \frac{5}{16}$$

$$P(\text{B gewinnt}) = \underbrace{\frac{1}{4}}_{(2:5)} + \underbrace{\frac{1}{8} + \frac{1}{8}}_{(3:5)} + \underbrace{\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}}_{(4:5)} = \frac{11}{16}$$

Die Kosten werden nach der W' aufgeteilt, zu verlieren.

$P(\text{A verliert}) = 1 - P(\text{A gewinnt}) = \frac{11}{16}$

$P(\text{B verliert}) = \frac{5}{16}$

Kosten für A: $4000 \cdot \frac{11}{16} = 2750$

Kosten für B: $4000 \cdot \frac{5}{16} = 1250$ (2)

b) $P(\text{A gewinnt ein Spiel}) = 0{,}4$

$P(\text{B gewinnt ein Spiel}) = 0{,}6$

$P(\text{A gewinnt Turnier mit } 5:3) = 1 \cdot 0{,}4^3 = 0{,}064$

$P(\text{A " " " } 5:4) = 3 \cdot 0{,}4^3 \cdot 0{,}6 = 0{,}1152$

$0{,}1792$

$P(\text{B gewinnt Turnier mit } 2:5) = 0{,}6^2 = 0{,}3600$

$P(\text{B " " " } 3:5) = 2 \cdot 0{,}6^2 \cdot 0{,}4 = 0{,}2880$

$P(\text{B " " " } 4:5) = 3 \cdot 0{,}6^2 \cdot 0{,}4^2 = 0{,}1728$

$0{,}8208$

Aufteilung nach der W' zu verlieren

A: $4000 \cdot 0{,}8208 = 3283{,}20$

B: $4000 \cdot 0{,}1792 = 716{,}80$ (2)

7. a. $\Omega = \{a, b, c\}$

| Anz. d. Elem. | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| Teilmengen | $\emptyset$ | $\{a\}\ \{b\}\ \{c\}$ | $\{a,b\}\ \{a,c\}\ \{b,c\}$ | $\{a,b,c\}$ |

$\mathcal{P}(\Omega)$ besteht aus $8 = 2^3$ Teilmengen von $\Omega$ und $|\Omega| = 3$. (1)

b. Kombinatorische Überlegung

Die n Elemente werden angeordnet

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, \ldots, n\}$

$(0, 1, 1, 0, \ldots, 1)$

In einem n-Tupel schreibt man auf jeden Platz 0, wenn das Element nicht für eine Teilmenge ausgewählt wird, und 1, wenn es gewählt wird. So wird jeder Teilmenge von $\Omega$ eindeutig ein n-Tupel mit 0;1 zugeordnet

Es gibt $2^n$ Tupel dieser Art, also auch $2^n$ Teilmengen.

2

c. Vollständige Induktion

Indukt. Anfang: $\Omega = \{1\}$ $|\Omega| = 1$

$\mathcal{P}(\Omega) = \{\emptyset, \{1\}\}$ also $|\mathcal{P}(\Omega)| = 2^1 = 2$

Induktionsvor.: $|\Omega| = n \Rightarrow |\mathcal{P}(\Omega)| = 2^n$

Induktionsbeh.: $|\Omega| = n+1 \Rightarrow |\mathcal{P}(\Omega)| = 2^{n+1}$

Induktionsbeweis:

$|\Omega| = n+1$ also $\Omega = \{1, 2, 3, \ldots, n+1\}$

$= \{1, 2, 3, \ldots, n\} \cup \{n+1\}$

Aus den ersten n Elementen kann man nach Ind-voraussetzung $2^n$ Teilmengen bilden. Alle diese enthalten das Element n+1 <u>nicht</u>. Jede dieser Teilmengen wird mit $\{n+1\}$ vereinigt. Das sind alle Teilmengen von $\Omega$ die n+1 <u>enthalten</u>.

Also $|\mathcal{P}(\Omega)| = 2^n + 2^n = 2^{n+1}$

alle Teilmengen

ohne mit dem Element n+1

Damit ist der Schritt von n auf n+1 bewiesen.

3