Dr. Reimund Albers Stochastik (BA FBW) SoSe 10

1. $$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2=\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2-2x_i\bar{x}+\bar{x}^2\right)$$ Binomische Formel

$$=\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\sum_{i=1}^{n}2x_i\bar{x}+\sum_{i=1}^{n}\bar{x}^2$$ Aufteilen der Summe

$$=\sum_{i=1}^{n}x_i^2-2\bar{x}\underbrace{\sum_{i=1}^{n}x_i}_{a)}+\bar{x}^2\underbrace{\sum_{i=1}^{n}1}_{b)}$$ Ausklammern konst. Faktoren

$$=\sum_{i=1}^{n}x_i^2-2\bar{x}\cdot n\bar{x}+\bar{x}^2\cdot n$$ a) Einführen des Mittelwerts
b) Ausrechnen der Summe

$$=\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2$$ Zusammenfassen

2. $$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})$$ Klammern ausmult.

$$=\sum_{i=1}^{n}\left(x_iy_i-x_i\bar{y}-\bar{x}y_i+\bar{x}\bar{y}\right)$$ Summe aufteilen

$$=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\sum_{i=1}^{n}x_i\bar{y}-\sum_{i=1}^{n}\bar{x}y_i+\sum_{i=1}^{n}\bar{x}\bar{y}$$ Konst Faktoren auskl.

$$=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\bar{y}\sum_{i=1}^{n}x_i-\bar{x}\sum_{i=1}^{n}y_i+\bar{x}\bar{y}\sum_{i=1}^{n}1$$ Mittelwerte einführen

$$=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\bar{y}\bar{x}-n\bar{x}\bar{y}+n\bar{x}\bar{y}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\bar{x}\bar{y}$$

HAUSÜBUNGEN

3 a) $\mu_1=60\cdot 0{,}25=15$ $\quad\mu_2=60\cdot 0{,}3=18$ (1)

b) Man erzeugt die Tabellen für $n=60$ $p=0{,}25$ und $n=60$ $p=0{,}3$

i) Man entscheidet sich für $p_1=0{,}25$, wenn 16 oder weniger Treffer.

ii) Man entscheidet sich für $p_2=0{,}3$, wenn 17 oder mehr Treffer n = 60 maximal 200 | p = 0,250 | nur die dunkelgrünen Zellen si

k	Bin(k,n,p)	kumuliert		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	0,000000	0,000000													
1	0,000001	0,000001													
2	0,000006	0,000007													
3	0,000040	0,000047													
4	0,000192	0,000239													
5	0,000717	0,000956													
6	0,002190	0,003146													
7	0,005632	0,008778		X											
8	0,012437	0,021215		X											
9	0,023953	0,045167		X	X										
10	0,040719	0,085887		X	X	X	X								
11	0,061696	0,147583		X	X	X	X	X	X						
12	0,083975	0,231558		X	X	X	X	X	X	X	X				
13	0,103354	0,334911		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X		
14	0,115658	0,450569		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
15	0,118228	0,568797		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
16	0,110839	0,679636	←	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	
17	0,095626	0,775262		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X		
18	0,076146	0,851408		X	X	X	X	X	X	X	X				
19	0,056108	0,907516		X	X	X	X	X	X						
20	0,038340	0,945856		X	X	X	X								
21	0,024343	0,970199		X	X										
22	0,014385	0,984584		X											
23	0,007922	0,992506		X											
24	0,004071	0,996577													
25	0,001954	0,998531													
26	0,000877	0,999407													

n = 60 maximal 200 | p = 0,300 | nur die dunkelgrünen Zellen si

k	Bin(k,n,p)	kumuliert		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	0,000000	0,000000													
1	0,000000	0,000000													
2	0,000000	0,000000													
3	0,000001	0,000002													
4	0,000008	0,000010													
5	0,000040	0,000050													
6	0,000158	0,000208													
7	0,000521	0,000729													
8	0,001479	0,002208													
9	0,003663	0,005871													
10	0,008007	0,013878		X											
11	0,015597	0,029475		X	X										
12	0,027295	0,056771		X	X	X									
13	0,043193	0,099963		X	X	X	X								
14	0,062145	0,162108		X	X	X	X	X	X						
15	0,081676	0,243784		X	X	X	X	X	X	X	X				
16	0,098449	0,342233	←	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X		
17	0,109204	0,451436		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	
18	0,111804	0,563240		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	
19	0,105919	0,669159		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	
20	0,093058	0,762217		X	X	X	X	X	X	X	X	X			
21	0,075965	0,838182		X	X	X	X	X	X	X	X				
22	0,057714	0,895896		X	X	X	X	X	X						
23	0,040866	0,936762		X	X	X	X								
24	0,027001	0,963762		X	X	X									
25	0,016663	0,980426		X	X										
26	0,009613	0,990039		X											

ii) $P(X \geq 17)$

$= 1 - P(X \leq 16)$

$\approx 1 - 0{,}6796 = 0{,}3204$

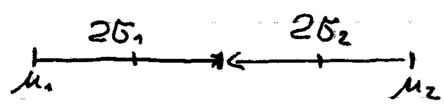
$\approx 32\%$

i) $P(X \leq 16) \approx 0{,}342$

$\approx 34\%$

(2)

c) n berechnen



(1)

Ansatz $\mu_1 + 2\sigma_1 = \mu_2 - 2\sigma_2$

$\mu_1 = n \cdot p_1 = 0{,}25\, n$ $\qquad \mu_2 = n \cdot p_2 = 0{,}3\, n$

$\sigma_1 = \sqrt{n \cdot p_1 \cdot (1-p_1)} = \sqrt{n \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}75}$ $\qquad \sigma_2 = \sqrt{n\, p_2\,(1-p_2)} = \sqrt{n \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7}$

$0{,}25\, n + 2 \cdot 0{,}25 \sqrt{n \cdot 3} = 0{,}3\, n - 2 \cdot 0{,}1 \cdot \sqrt{n \cdot 21}$ (1)

$0{,}5 \sqrt{n}\sqrt{3} + 0{,}2 \sqrt{n}\sqrt{21} = 0{,}05\, n$

$\sqrt{n} = \frac{1}{0{,}05}\left(0{,}5\sqrt{3} + 0{,}2\sqrt{21}\right)$

$\sqrt{n} \approx 35{,}65$

$n \approx 1271$ (1)

Bei $n = 1271$ Versuchen sind dann die Erwartungswerte:

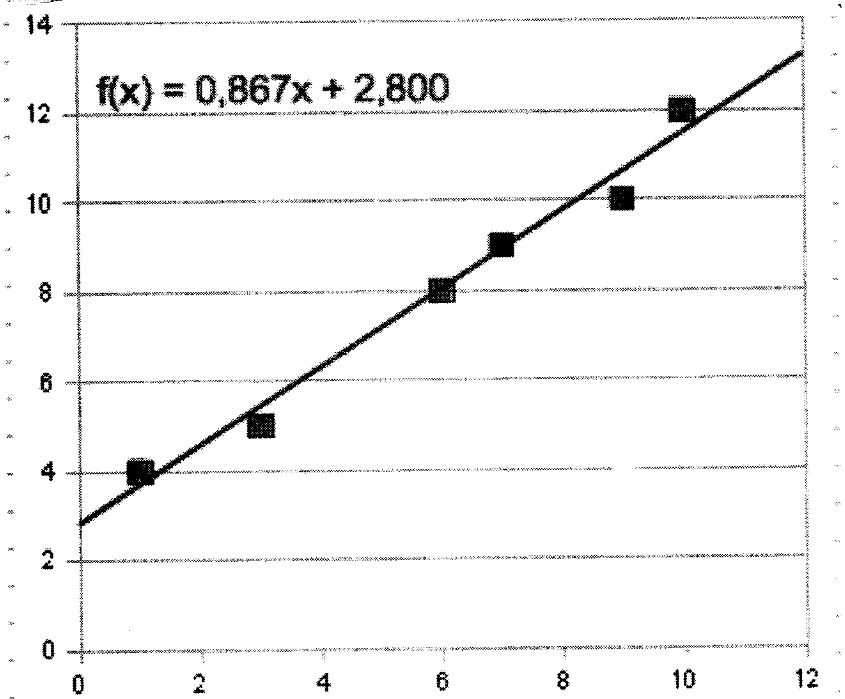
$\mu_1 = 1271 \cdot 0{,}25 \approx 317{,}75$ $\qquad \mu_2 = 1271 \cdot 0{,}3 = 381{,}3$

Mittelwert $(\mu_1 + \mu_2) : 2 \approx 349{,}5$

Bei 349 oder weniger Treffern entscheidet man sich für $p_1 = 0{,}25$

bei 350 oder mehr Treffern für $p_2 = 0{,}3$ (1)

4. a)



(1)

b)

							Summe
x	1	3	6	7	9	10	36
y	4	5	8	9	10	12	48
x^2	1	9	36	49	81	100	276
(y^2	16	25	64	81	100	144	430) hier überflüssig
xy	4	15	48	63	90	120	340

(1)

$$S_{xx} = \sum x^2 - \frac{1}{n}\left(\sum x\right)^2 = 276 - \frac{1}{6}\cdot 36\cdot 36 = 60$$

$$S_{xy} = \sum xy - \frac{1}{n}\sum x \cdot \sum y = 340 - \frac{1}{6}\, 36\cdot 48 = 52$$

Regressionsgerade m, b

$$m = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} = \frac{52}{60} \approx 0{,}867$$

$$b = \bar{y} - m\bar{x} = 8 - \frac{52}{60}\cdot 6 = 8 - \frac{52}{10} = 2{,}8$$ (1)

Gleichung: $y \approx 0{,}867x + 2{,}8$ (so wie oben)

c) Beide Ergebnisse stimmen überein

(1)

5. a) $n = 150 \quad p = \frac{1}{6}$

Erwartungswert $\mu = 150 \cdot \frac{1}{6} = 25$

30 Plätze reichen nicht:

$P(X \geq 31) = 1 - P(X \leq 30)$ Ablesen in Tabelle ②

$\approx 1 - 0{,}884 = 0{,}116$ Mit einer W' von ca. 12% reichen die Arbeitsplätze nicht

b) $P(X \geq G) \leq 0{,}05$

$1 - P(X \leq G-1) \leq 0{,}05$

$0{,}95 \leq P(X \leq G-1)$ Tabelle

$\leq P(X \leq 33)$

Man braucht in diesem Fall 34 Arbeitsplätze ①

6. Ansatz $p = \frac{\text{Günstige Möglichk.}}{\text{alle Möglichk.}}$

Alle Möglichkeiten: n-Tupel, alle Permutat. sind $\underline{\underline{n!}}$

günstige Möglichk.: Am vorletzten Platz ist der passende Schlüssel fest. Restlichen $(n-1)$ Schlüssel permutieren

$\rightarrow (n-1)!$ Möglichkeiten

$$p = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$$

Die W', den richtigen Schlüssel im vorletzten Zug zu erwischen ist $\frac{1}{n}$. ②

Summe 16