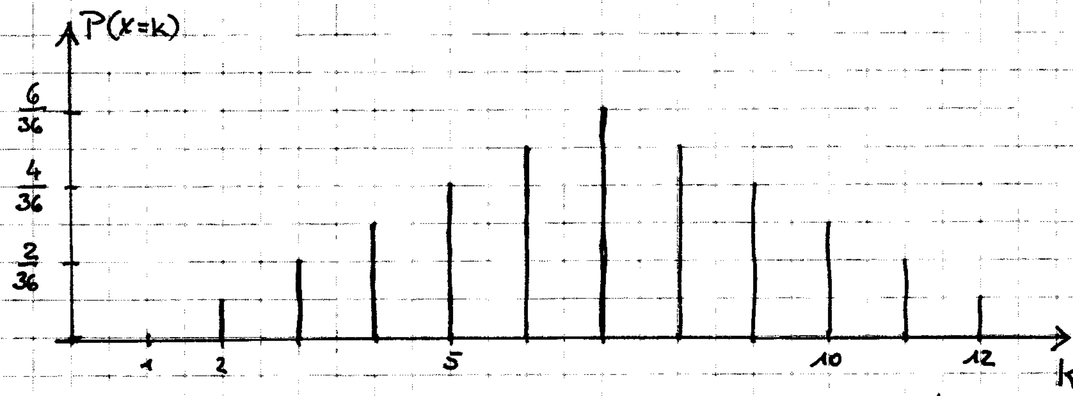
Dr. Reimund Albers Stochastik (BA FBW) SoSe 2010

11. Übung Lösungsskizzen

1.

Werte für X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X=\dots)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$



$$E(X) = 2\cdot\frac{1}{36} + 3\cdot\frac{2}{36} + \dots 7\cdot\frac{6}{36} + 8\cdot\frac{5}{36} + \dots + 12\cdot\frac{1}{36}$$
$$= \frac{1}{36}\left(2+6+12+20+30+42+40+36+30+22+12\right)$$
$$= \frac{1}{36}(252) = 7$$

$$V(X) = (2-7)^2\cdot\frac{1}{36} + (3-7)^2\cdot\frac{2}{36} + \dots (7-7)^2\cdot\frac{6}{36} + (8-7)^2\cdot\frac{5}{36} + \dots$$
$$+ (12-7)^2\,\frac{1}{36}$$
$$= \frac{1}{36}\left(25 + 16\cdot 2 + 9\cdot 3 + 4\cdot 4 + 1\cdot 5 + 0\cdot 6 + 1\cdot 5 + 4\cdot 4 + 9\cdot 3 + 16\cdot 2 + 25\right)$$
$$= \frac{1}{36}\left(50 + 64 + 54 + 32 + 10\right) = \frac{1}{36}\cdot 210 = \frac{35}{6}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{35}{6}} \approx 2{,}42$$

Im Intervall $[7-2{,}42\,;\,7+2{,}42]$ liegen $\frac{1}{36}(4+5+6+5+4) = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$.

2. Probieren mit $n = 2, 3, 4, 5$ legt nahe, die Fälle n gerade und n ungerade zu unterscheiden

<u>n gerade</u> Ziehen ohne Zurücklegen ohne B.d.R. $\Rightarrow |\Omega| = \frac{1}{2}n(n-1)$

Werte für X	3	4	5	6	… n	$n+1$	$n+2$ …	$2n-2$	$2n-1$
$P(X=\dots)$	$\frac{1}{\lvert\Omega\rvert}$	$\frac{1}{\lvert\Omega\rvert}$	$\frac{2}{\lvert\Omega\rvert}$	$\frac{2}{\lvert\Omega\rvert}$	$\frac{\frac{n}{2}-1}{\lvert\Omega\rvert}$	$\frac{\frac{n}{2}}{\lvert\Omega\rvert}$	$\frac{\frac{n}{2}-1}{\lvert\Omega\rvert}$	$\frac{1}{\lvert\Omega\rvert}$	$\frac{1}{\lvert\Omega\rvert}$

Auf Grund der Symmetrie ist $E(X)=\mu=(n+1)$

<u>n ungerade</u> $\quad |\Omega| = \frac{1}{2}\, n(n-1)$

Werte für X	3	4	5	6	…	$n-1$	n	$n+1$	$n+2$	$n+3$	….	$2n-1$
$P(X=\ldots)$	$\frac{1}{\lvert\Omega\rvert}$	$\frac{1}{\lvert\Omega\rvert}$	$\frac{2}{\lvert\Omega\rvert}$	$\frac{2}{\lvert\Omega\rvert}$		$\frac{\frac{n-3}{2}}{\lvert\Omega\rvert}$	$\frac{\frac{n-1}{2}}{\lvert\Omega\rvert}$	$\frac{\frac{n-1}{2}}{\lvert\Omega\rvert}$	$\frac{\frac{n-1}{2}}{\lvert\Omega\rvert}$	$\frac{\frac{n-3}{2}}{\lvert\Omega\rvert}$		$\frac{1}{\lvert\Omega\rvert}$

n erzielt man durch $(1;n-1)$, $(2;n-2)$, … $\left(\frac{n-1}{2};\frac{n+1}{2}\right)$

$n+1$ " " " $(1;n)$, $(2;n-1)$, … $\left(\frac{n-1}{2};\frac{n+3}{2}\right)$

$n+2$ " " " $(2;n)$, $(3;n-1)$, … $\left(\frac{n-1}{2};\frac{n+5}{2}\right)$, $\left(\frac{n+1}{2};\frac{n+3}{2}\right)$

Auf Grund der Symmetrie ist $E(X)=\mu=(n+1)$

HAUSÜBUNG

3.

Anzahl der „Zahl"	0	1	2	3	4
W'	$\left(\frac{1}{2}\right)^4$	$4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4$	$6\left(\frac{1}{2}\right)^4$	$4\left(\frac{1}{2}\right)^4$	$\left(\frac{1}{2}\right)^4$
X: Gewinn	-3	-3	-3	7	22

a) Also ist für den Gewinn X: $\quad \Omega = \{-3, 7, 22\}$ ①

$P(X=-3) = (1+4+6)\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{11}{16}$

$P(X=7) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} \qquad P(X=22) = \frac{1}{16}$ ①

Übersichtstabelle

k	-3	7	22
$P(X=k)$	$\frac{11}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

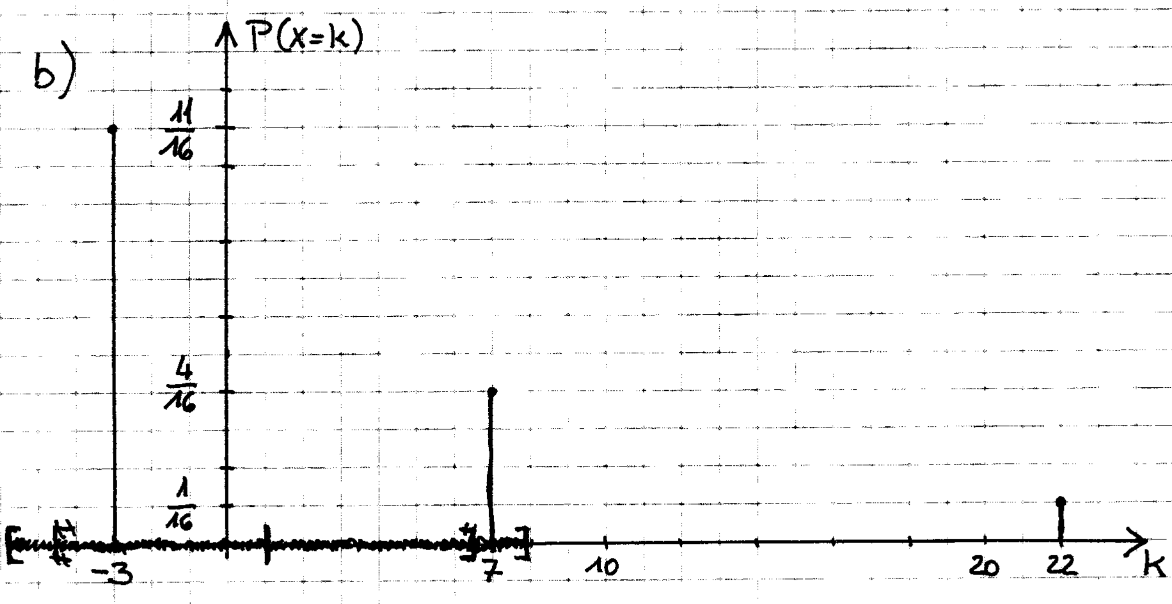
Erwartungswert: $E(X) = -3\cdot\frac{11}{16} + 7\cdot\frac{1}{4} + 22\cdot\frac{1}{16}$

$$= \frac{1}{16}\left(-33+28+22\right) = \frac{17}{16}$$

Da der Erwartungswert für den Gewinn (= Auszahl. − Einsatz) positiv ist, lohnt sich das Spiel auf lange Sicht ①

3

b)



1

c)

$$V(X)=\left(-3-\frac{17}{16}\right)^2\cdot\frac{11}{16}+\left(7-\frac{17}{16}\right)^2\cdot\frac{1}{4}+\left(22-\frac{17}{16}\right)^2\cdot\frac{1}{16}$$

$$=\frac{1}{16}\left(\frac{4225}{256}\cdot 11+\frac{9025}{256}\cdot 4+\frac{325^2}{256}\right)$$

$$\approx\frac{1}{16}\cdot 735{,}16\approx 46$$

$$\sigma\approx\sqrt{46}\approx 6{,}78$$

1

4. a) $n=25 \quad p=0{,}4 \qquad \mu=10 \quad \sigma\approx 2{,}45$

$\mu-\sigma\approx 7{,}55 \quad \mu+\sigma\approx 12{,}45$

$P(8\leq X\leq 12)\approx 0{,}8462-0{,}1536\approx 69{,}3\%$

b) $n=50 \quad p=0{,}4 \qquad \mu=20 \quad \sigma\approx 3{,}46$

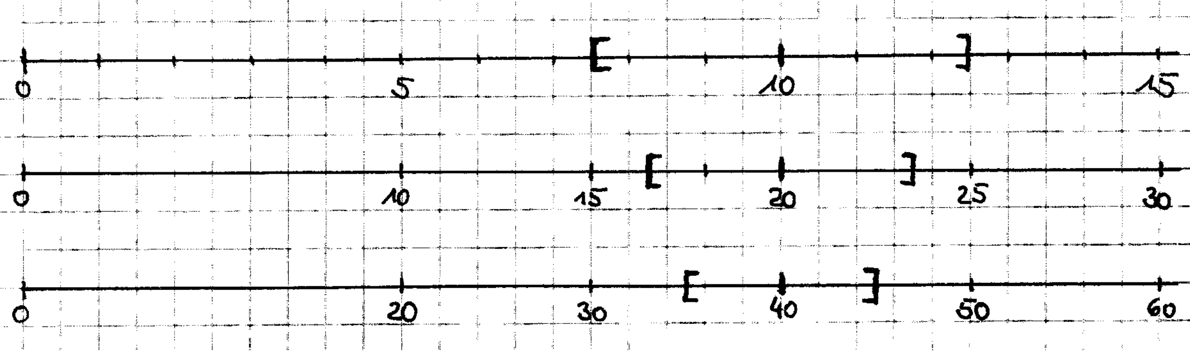
$\mu-\sigma\approx 16{,}54 \quad \mu+\sigma\approx 23{,}46$

$P(17\leq X\leq 23)\approx 0{,}8438-0{,}1561\approx 68{,}8\%$

c) $n=100 \quad p=0{,}4 \qquad \mu=40 \quad \sigma\approx 4{,}90$

$\mu-\sigma\approx 35{,}10 \quad \mu+\sigma\approx 44{,}90$

$P(36\leq X\leq 44)\approx 0{,}8211-0{,}1795\approx 64{,}2\%$



3

4d) Die Intervalle werden relativ zur Gesamtlänge n immer kürzer (1)

5. a) Ohne Berücksichtigung der Reihenfolge

Man erhält alle Paare, wenn man sie aufschreibt als $(a;b)$ mit $a,b \in \{1,2,3,4,5,6\}$ und $a \le b$

(1;1)

(1;2) (2;2)

(1;3) (2;3) (3;3)

(1;4) (2;4) (3;4) (4;4)

(1;5) (2;5) (3;5) (4;5) (5;5)

(1;6) (2;6) (3;6) (4;6) (5;6) (6;6)

Das sind 21 Paare. Füllt man die übrigen Paare aus (mit $a > b$), so erhält man 36 Ergebnisse.

O.B.d.R erhält man die 4 durch 1+3 und 2+2

mit B.d.R. " " " 4 " 1+3, 2+2 u. 3+1 (1)

b) Warum 168? $\text{kgV}(12, 21) = 84 = 7 \cdot 12 = 4 \cdot 21$

$168 = 2 \cdot 84$. So erhält man für beide W' ganzzahlige Erwartungswerte (1)

$p_1 = \frac{1}{12} \quad \mu_1 = \frac{1}{12} \cdot 168 = 14 \qquad p_2 = \frac{2}{21} \quad \mu_2 = 16$

$P(x \ge 16)$ berechnen für $p_1 = \frac{1}{12} \approx 0{,}0833$ und n = 168

$P(X \ge 16) = 1 - P(X \le 15) \approx 1 - 0{,}6738 \approx 32\%$

D.h mit einer W' von etwa ein Drittel kann man zur falschen Entscheidung kommen. (1)

c) Fertige Formel der Vorlesung

$$\mu = \frac{\left(\sqrt{p_1(1-p_1)} + \sqrt{p_2(1-p_2)}\right)^2}{(p_2 - p_1)^2} \qquad p_1 < p_2$$

mit $p_1 = \frac{1}{12}$ $p_2 = \frac{2}{21}$

$\sqrt{p_1(1-p_1)} = \frac{1}{12} \cdot \sqrt{11} \approx 0{,}2764$

$\sqrt{p_2(1-p_2)} = \frac{1}{21} \cdot \sqrt{39} \approx 0{,}2974$ $p_2 - p_1 = \frac{8}{84} - \frac{7}{84} = \frac{1}{84}$

$$n \approx 84^2 \cdot (0{,}2764 + 0{,}2974)^2 \approx 2322{,}8$$

Die Klasse muss mindestens 2323 Würfe machen.

Bei ungefähr 30 Schülern also jeder ca. 80 (2)

6. a) Einnahmen = Fluggäste · 400

$E(\text{Einnahmen}) = 400 \cdot E(\text{Fluggäste})$

$= 400 \cdot 80 \cdot 0{,}85 = \underline{\underline{27200}}$ (1)

b) Es werden 85 Flugg. gebucht. Davon erscheinen tatsächlich k.

$P(k \text{ erscheinen}) = \binom{85}{k} 0{,}85^k \, 0{,}15^{85-k}$

Einnahmen X bei k erschienen Fluggästen

$k = 0, 1, 2, 3, \ldots, 80$: Alle k Flugg. können fliegen

$X = k \cdot 400$

$k = 81, 82, \ldots, 85$: 80 können fliegen $(80 \cdot 400)$

$k-80$ können nicht fliegen, zahlen nicht (0€)

und bekommen noch 100€ (−100€)

$X = 80 \cdot 400 + (0 - 100)(k-80)$ (1)

Erwartungswert

$$E(X) = \sum_{k=0}^{80} k \cdot 400 \cdot P(k \text{ ersch.})$$

$$+ \sum_{k=81}^{85} [80 \cdot 400 - 100(k-80)] \cdot P(k \text{ ersch})$$ (1)

Lässt man nun in der ersten Summe k bis 85 laufen, summiert man über die volle Binomialverteilung. Der Erwartungswert ist dann $400 \cdot 85 \cdot 0{,}85$. Zur Korrektur muss man die Summe von 81 bis 85 wieder abziehen.

$$E(x) = \sum_{k=0}^{85} k \cdot 400 \cdot P(k \text{ ersch.}) - \sum_{k=81}^{85} k \cdot 400\, P(k \text{ ersch.})$$

$$+ \sum_{k=81}^{85} \left[80 \cdot 400 - 100(k-80)\right] P(k \text{ ersch.})$$

unter eine Summe

$$= 400 \cdot 85 \cdot 0{,}85 + \sum_{k=81}^{85} \left[-k \cdot 400 + 80 \cdot 400 - 100(k-80)\right] P(k \text{ ersch.})$$

$$\left[400(-k+80) - 100(k-80)\right]$$

$$\left[-500(k-80)\right]$$

$$= 400 \cdot 85 \cdot 0{,}85 - 500 \cdot \left[1 \cdot 0{,}001966 + 2 \cdot 0{,}000544 + 3 \cdot 0{,}000111 + 4 \cdot 0{,}000015 + 5 \cdot 0{,}000001\right]$$

Werte aus Computertabelle $n = 85$ $p = 0{,}85$

$$\approx 28900 - 500 \cdot 0{,}003452$$

$$\approx \underline{28898{,}27}$$

2

Unter den genannten Umständen lohnt sich das Überbuchen auf 85. Es bringt ca. 1700 € Mehreinnahmen.

Aufg	3	4	5	6	Sum
Punkte	5	4	5	5	19