Dr. Reimund Albers, Stochastik (BA FBW) SoSe 10

10. Übung Lösungsskizzen

1.

a) $P(X=7)$ für $n=96$ und $p=0{,}15$

$= 0{,}010646$

b) Die Tabelle ist unbrauchbar für $n \neq 96$ und $p \neq 0{,}15$. Man kann also nicht ablesen $P(X=9)$ für $n=10$ und $p=0{,}25$

c) „Kumuliert" ist die Aufsummierung der Werte für $k=0$ bis <u>einschließlich</u> der Zeile, in der man abliest.

Kumuliert $k=10$ ist die Summe in der Spalte $Bin(k,n,p)$ von 0 bis einschl. $k=10$

d) Die Kreuze sind eine sehr einfache grafische Veranschaulichung der Werte für $Bin(k,n,p)$, gerundet auf zwei Stellen h.d. Komma

2. $\mu = n \cdot p = 96 \cdot 0{,}15 = 14{,}4$

$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{96 \cdot 0{,}15 \cdot 0{,}85} \approx 3{,}5$

a) $[\sigma + \mu \,;\, \sigma + \mu] \approx [10{,}9 \,;\, 17{,}9]$

b) $P(10{,}9 \leq X \leq 17{,}9) = P(X \leq 17) - P(X \leq 10)$

$\approx 0{,}814373 - 0{,}130118$

$= 0{,}684255 \approx 68{,}4\,\%$

HAUSÜBUNGEN

3a) „Binomial - Tabelle" aufrufen, $p = 0{,}21$ und $n = 31$ eingeben, bei $k = 8$ ablesen: $P(X=8) \approx 0{,}132$ (1)

b) In Tabelle eingeben $p = 0{,}3$ $n = 124$

$P(X \geq 33) = 1 - P(X \leq 32)$

Den kumulierten Wert für $k = 32$ ablesen

$\approx 1 - 0{,}179 = 0{,}821$ (1)

c) Zuerst die Intervallgrenzen berechnen

$\mu = n \cdot p \approx 162 \cdot 0{,}618 \approx 100$

$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} \approx \sqrt{162 \cdot 0{,}618 \cdot 0{,}382} \approx 6{,}18$

$\mu - 1{,}5\sigma \approx 90{,}8$ $\quad \mu + 1{,}5\sigma \approx 109{,}4$ (1)

Also ist mit $n = 162$ und $p = 0{,}618$ in der Tabelle abzulesen:

$P(X \geq 91 \text{ und } X \leq 109) = P(X \leq 109) - P(X \leq 90)$

$\approx 0{,}9366 - 0{,}0826$

$\approx 0{,}8540$ (1)

4. Strategie A Ein Transport

Ergebnis	0 Überfälle	1 Überfall
W'	0,88	0,12
X = Verlust	\$0	\$ 1.300.000

$E(X) = 1.300.000 \cdot 0{,}12 = \underline{\underline{156.000}}$ (1)

Strategie B Fünf Transporte von je \$260.000

Anzahl d. Überfälle k	0	1	2	3	4	5
W'	$0{,}88^5$ $\approx 0{,}528$	$5 \cdot 0{,}12 \cdot 0{,}88^4$ $\approx 0{,}360$	$\binom{5}{k} \cdot 0{,}12^k \cdot 0{,}88^{5-k}$ $\approx 0{,}098$	$\approx 0{,}013$	$\approx 0{,}001$	$\approx 0{,}000$
X = Verlust	\$0	\$260.000	\$520.000	\$780.000	\$1.040.000	1.300.000

(1)

Erwartungswert: $E(X) \approx 0 + 260.000 \cdot 0{,}360 + 520.000 \cdot 0{,}098$
$+ 780.000 \cdot 0{,}013 + 1.040.000 \cdot 0{,}001$
≈ 156.000

Nach dem Erwartungswert für den Verlust sind beide Strategien gleich gut. (1)

5. Die Pünktlichkeit der Klasse ist eine Bernoulli-Kette der Länge $n = 25$. Treffer ist „Schüler/in ist pünktlich", laut Text ist $p = 0{,}95$

Die Klasse ist pünktlich, wenn man 25 oder 24 Treffer hat. (1)

Also in der Tabelle $n = 25$ $p = 0{,}95$ einstellen

$P(X=24) + P(X=25) \approx 0{,}365 + 0{,}277$
$\approx 0{,}642$ (1)

Die Pünktlichkeit der Klasse liegt bei etwa 64%.
Also in etwa jedem 3. Fall ist sie unpünktlich.

6. a) $v(1) = \sum_{i=1}^{5} (x_i - 1)^2 \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{5}(16 + 4 + 1 + 9 + 16)$
$= 9{,}2$

$v(2) = \sum_{i=1}^{5} (x_i - 2)^2 \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{5}(25 + 9 + 4 + 4 + 9)$
$= 10{,}2$

$v(3) = \sum_{i=1}^{5} (x_i - 3)^2 \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{5}(36 + 16 + 9 + 1 + 4)$
$= 13{,}2$ (2)

b) $v(m) = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^{5} (x_i - m)^2$

Das ist eine Funktion für m, die x_i, $i = 1, 2, \ldots, 5$ werden als Konstante betrachtet.

Ableiten nach m (Kettenregel)

$$v'(m) = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^{5} 2 \cdot (x_i - m) \cdot (-1) \quad 1$$

Ableitung Null setzen

$$\frac{1}{5} \sum_{i=1}^{5} 2(x_i - m)(-1) = 0 \quad \Big| \cdot -\frac{5}{2} \quad 1$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{5} (x_i - m) = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - 5m = 0$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}{5} \quad 1$$

Also gibt es für $m = \mu = \frac{1}{5}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)$ eine Stelle mit Ableitung 0

2. Ableitung

$$v''(m) = -\frac{2}{5} \sum_{i=1}^{5} (-1)$$

$$= -\frac{2}{5} \cdot (-5) = +2 \quad 1$$

Also ~~ist~~ hat v bei $m = \mu$ tatsächlich ein Minimum, $m = \mu$ ist das gesuchte m^*.

Die Varianz bezüglich des Wertes m wird minimal, wenn m gerade den Mittelwert μ annimmt. 1

Summe 16