Dr. Reimund Albers   Stochastik (BA FBW)   SoSe 10

9. Übung, Lösungsskizzen

1. (1) ist der direkte Ansatz für den E-Wert, also Wert der Zufallsgröße · zugehöriger W'

(1) -> (2) Indextransformation $k=1 \to k=0$ um 1 verringert, als muss in der Formel k durch k+1 ersetzt werden

(2) -> (3) (k+1) wird ausmultipliziert und auf zwei Summen aufgeteilt

(3) -> (4) 1. Summe: $\sum_{k=0}^{\infty} kp(1-p)^k = (1-p) \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} kp(1-p)^{k-1}}_{(1) \text{ ist } E(x)}$

2. Summe: Summe aller W' ist 1

Am Ende wird die Gleichung $E(x) = (1-p)E(X) + 1$ nach $E(X)$ aufgelöst.

2. Berechnung von p_6: $0{,}3 + 0{,}2 + 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}1 + p_6 = 1$

$$\Rightarrow p_6 = 0{,}1$$

$$E(X) = -5 \cdot 0{,}3 + (-1) \cdot 0{,}2 + 2 \cdot 0{,}1 + 4 \cdot 0{,}2 + 6 \cdot 0{,}1 + k_6 \cdot 0{,}1 = 0$$

$$-1{,}5 - 0{,}2 + 0{,}2 + 0{,}8 + 0{,}6 + k_6 \cdot 0{,}1 = 0$$

$$-0{,}1 + k_6 \cdot 0{,}1 = 0$$

$$\underline{\underline{k_6 = 1}}$$

$$V(X) = 25 \cdot 0{,}3 + 1 \cdot 0{,}2 + 4 \cdot 0{,}1 + 16 \cdot 0{,}2 + 36 \cdot 0{,}1 + 1 \cdot 0{,}1$$

$$= 7{,}5 + 0{,}2 + 0{,}4 + 3{,}2 + 3{,}6 + 0{,}1 = \underline{\underline{15}}$$

$$\sigma = \sqrt{15} \approx \underline{\underline{3{,}87}}$$

Hausübungen

3. <u>1 angekr. Zahl</u>: $P(1\text{ richtig}) = \binom{20}{1} : \binom{80}{1} = \frac{1}{4}$

$E(\text{Auszahlung}) = 3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = \boxed{0{,}75}$ (1)

<u>2 angekr. Zahlen</u> $P(2\text{ richtig}) = \binom{20}{2} : \binom{80}{2}$

$= \frac{\cancel{20}^{1} \cdot 19}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{\cancel{80}_{4} \cdot 79} = \frac{19}{316}$

$P(1\text{ richtig}) = \frac{\binom{20}{1}\binom{60}{1}}{\binom{80}{2}} = \frac{\cancel{20} \cdot \cancel{60}^{30}}{\cancel{80}_{4} \cdot 79} \cdot \cancel{2}^{1} = \frac{30}{79}$

$E(\text{Auszahlung}) = \cancel{12}^{3} \cdot \frac{19}{\cancel{316}_{79}} = \frac{57}{79} \approx \boxed{0{,}72}$ (1)

<u>3 angekr. Zahlen</u>

$P(2\text{ richtige}) = \frac{\binom{20}{2}\binom{60}{1}}{\binom{80}{3}} = \frac{\cancel{20} \cdot 19 \cdot \cancel{60}^{15} \cdot 1 \cdot \cancel{2} \cdot 3}{\cancel{2} \cdot \cancel{80}_{4} \cdot 79 \cdot 78} = \frac{285}{2054}$

$P(3\text{ richtig}) = \frac{\binom{20}{3}}{\binom{80}{3}} = \frac{\cancel{20} \cdot 19 \cdot 18}{\cancel{80}_{4} \cdot 79 \cdot 78} = \frac{57}{4108}$

$E(\text{Auszahlung}) = 1 \cdot \frac{285}{2054} + 42 \cdot \frac{57}{4108} \approx \boxed{0{,}72}$ (2)

<u>4 angekr. Zahlen</u>

$P(2\text{ richtig}) = \frac{\binom{20}{2}\binom{60}{2}}{\binom{80}{4}} = \frac{\cancel{20} \cdot 19 \cdot 60 \cdot 59}{\cancel{2} \cdot \cancel{2}} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cancel{4}}{\cancel{80}_{4} \cdot 79 \cdot 78 \cdot 77}$

$= \frac{16815}{79079}$

$P(3\text{ richtig}) = \frac{\binom{20}{3} \cdot \binom{60}{1}}{\binom{80}{4}} = \frac{1140 \cdot 60}{1581580} = \frac{3420}{79079}$

$P(4\text{ richtig}) = \frac{\cancel{20} \cdot 19 \cdot \cancel{18}^{3} \cdot 17}{\cancel{80}_{4} \cdot 79 \cdot \cancel{78}_{13} \cdot 77} = \frac{969}{316316}$

$E(\text{Auszahlung}) = 1 \cdot \frac{16815}{79079} + 3 \cdot \frac{3420}{79079} + 115 \cdot \frac{969}{316316} \approx \boxed{0{,}69}$ (2)

5 angekr. Zahlen

$$P(3 \text{ richtig}) = \frac{\binom{20}{3}\binom{60}{2}}{\binom{80}{5}} = \frac{13275}{158158}$$

$$P(4 \text{ richtig}) = \frac{\binom{20}{4}\binom{60}{1}}{\binom{80}{5}} = \frac{3825}{316316}$$

$$P(5 \text{ richtig}) = \frac{\binom{20}{5}}{\binom{80}{5}} = \frac{51}{79079}$$

$$E(\text{Auszahlung}) \approx \boxed{0,68}$$ (2)

Auf lange Sicht ist es am günstigsten, nur eine Zahl anzukreuzen. (1)

4. a)

X: Anz. d. Wägungen	1	2	3	...	20
W'	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	...	$\frac{1}{20}$

$$E(X) = \frac{21}{2} = 10,5$$ (1)

b). Ist das def. Teil in der 1. Gruppe, ~~sind~~ ist 1 Wägung notwendig. Im 2. Schritt ist dann noch 1 bis 5 Wägungen notwendig.

Also

	← 1. Grp →					← 2. Grp →					← 3. Grp →				
Anz. d. W.:	2	3	4	5	6	3	4	5	6	7	4	5	6	7	8

← 4. Grp →
5 6 7 8 9

Jede Anzahl von Wägungen ist gleichw.

$$E(\text{Anz. d. Wäg.}) = \frac{1}{20}(2+3+4+5+6+3+4+\dots+8+9)$$

$$= \frac{1}{20}(20+25+30+35) = \frac{110}{20} = 5,5$$ (2)

c) Die 2. Strategie ist günstiger, da sie nur einen Erwartungswert von 5,5 für die Anzahl der Wägungen hat. (1)

5. Übersichtstabelle für die Auszahlung

	1	2	3	4	5	6	Spaltensumme
1	2	3	-4	5	6	7	19
2	3	4	-5	6	7	8	23
3	-4	-5	-6	-7	-8	-9	-39
4	5	6	-7	8	9	10	31
5	6	7	-8	9	10	11	35
6	7	8	-9	10	11	12	39
							108

Der Erwartungsw. für die Auszahlung ist $\frac{108}{36} = 3$

Das Spiel ist auf lange Sicht ausgeglichen. (2)

6. X: Anzahl der Treffer bei einer Bernoullikette der Länge 4 und Trefferw' p

$$E(X) = 0 \cdot \binom{4}{0}(1-p)^4 + 1 \cdot \binom{4}{1} p (1-p)^3 + 2\binom{4}{2} p^2 (1-p)^2 + 3\binom{4}{3} p^3 (1-p) + 4\binom{4}{4} p^4$$

$$= p\left[4(1-p)^3 + 12p(1-p)^2 + 12p^2(1-p) + 4p^3\right]$$

$$= 4p\left[(1-p)^3 + 3p(1-p)^2 + 3p^2(1-p) + p^3\right]$$

$$= 4p\left[p + (1-p)\right]^3$$

$$= 4p$$

(2)

Summe Hausübungen: 15