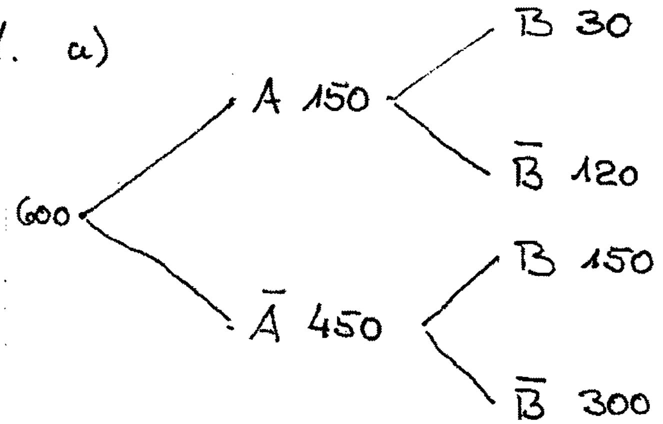
Dr. Reimund Albers Stochastik (BA FBW) SoSe 10

6. Übung Lösungsskizzen

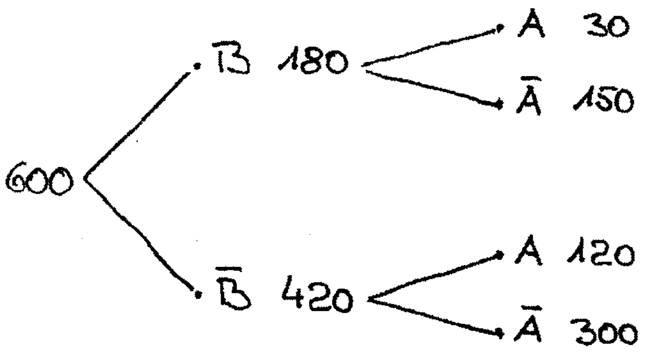
1. a)



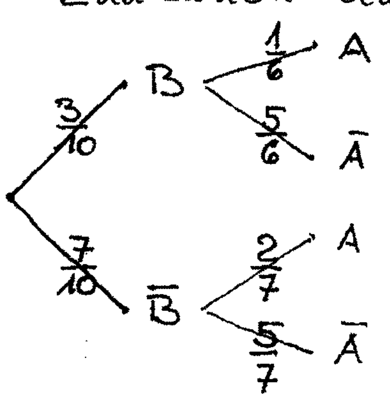
b) Vierfeldertafel

	B	$\bar{B}$	
A	30	120	150
$\bar{A}$	150	300	450
	180	420	600

c) i)



ii) Das zu c) gehörige Diagramm mit den W' erhält man, indem man für jeden Zweig die Endzahlen durch die Anfangszahlen dividiert



d) $P(A|B) = \frac{1}{6}$ $P(A|\bar{B}) = \frac{2}{7}$ $P(\bar{A}|\bar{B}) = \frac{5}{7}$

$P(B|\bar{A}) = \frac{1}{3}$ $P(\bar{B}|A) = \frac{4}{5}$

e) A: Person ist Wähler der Grünen

B: Person ist Befürworter e. Müllverbr.

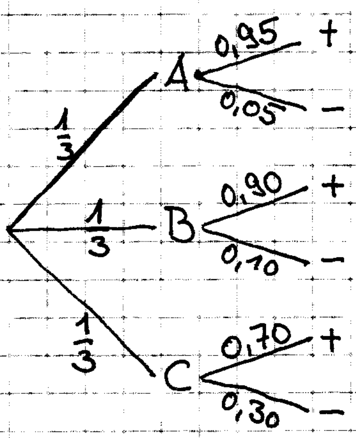
Die erste Frage ist dann nach $P(B/A)$.

Im ersten Baumdiagramm steht $P(B/A) = \frac{1}{5} = 20\%$

Die zweite Frage fragt nach $P(A/B) = \frac{1}{6} \approx 16{,}7\%$

HAUSÜBUNGEN

2. Baumdiagramm



a) $P(A \text{ und } +) = \frac{1}{3} \cdot 0{,}95 \approx 32\%$ 1

b) $P(C \text{ und } -) = \frac{1}{3} \cdot 0{,}30 = 10\%$ 1

c) $P(-) = P(A \text{ und } -) + P(B \text{ und } -) + P(C \text{ und } -)$

$= \frac{1}{3} \cdot 0{,}05 + \frac{1}{3} \cdot 0{,}10 + \frac{1}{3} \cdot 0{,}30$

$= 15\%$ 1

d) $P(B|-) = \frac{P(B \text{ und } -)}{P(-)}$

$= \frac{\frac{1}{3} \cdot 0{,}10}{0{,}15} \approx 22\%$ 1

e) $P(C|+) = \frac{P(C \text{ und } +)}{P(+)}$

c) liefert $P(+) = 1 - P(-) = 85\%$

$= \frac{\frac{1}{3} \cdot 0{,}70}{0{,}85} \approx 27{,}5\%$ 1

f) $P(A|-) = \frac{P(A \text{ und } -)}{P(-)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot 0{,}05}{0{,}15} \approx 11\%$ 1

3. a) $\xrightarrow{P(A)} A \xrightarrow{P(B/A)} B$

Pfadregel: $P(A) \cdot P(B/A) = P(A \cap B) \quad | : P(A)$

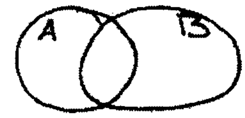
$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ 1

3b) $P(A|\Omega) = \dfrac{P(A \cap \Omega)}{P(\Omega)}$

da $A \cap \Omega = A$ und $P(\Omega) = 1$ gilt.

$P(A|\Omega) = \dfrac{P(A)}{1} = P(A)$ 1

c) $P(A \cup B | B) = \dfrac{P((A \cup B) \cap B)}{P(B)}$



Am Mengendiagramm kann man ablesen: $(A \cup B) \cap B = B$.

Also gilt: $= \dfrac{P(B)}{P(B)} = 1$ für $P(B) \neq 0$ 1

d) $P(A|A) = \dfrac{P(A \cap A)}{P(A)} = \dfrac{P(A)}{P(A)} = 1$

$P(A|\bar{A}) = \dfrac{P(A \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = \dfrac{P(\emptyset)}{P(A)} = 0$ 1

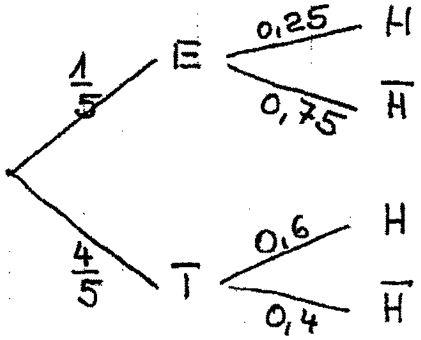
e) Zu b) „... wenn bereits Ω eingetreten ist" ist keine wirkliche Bedingung. Man kann sie weglassen. Damit ist: „$P(A|\Omega)$ ist die W' für A". 1

Zu c) „$P(A \cup B|B)$ ist die W' für A oder B, wenn bereits B eingetreten ist."
Wenn B bereits erfüllt ist, so wird „A oder B" mit Sicherheit auch erfüllt, also mit W' 1. 1

Zu d) i) „$P(A|A)$ ist die W' für A, wenn bereits A eingetreten ist" A tritt mit Sicherheit ein, wenn A bereits erfüllt ist.

ii) „$P(A|\bar{A})$ ist die W' für A, wenn bereits A <u>nicht</u> eingetreten ist" Dann kann A mit Sicherheit <u>nicht</u> erfüllt werden, die W' ist also 0. 1

4. Baumdiagramm zur Situation



totale W'

$$P(H) = P(E \cap H) + P(T \cap H)$$
$$= \frac{1}{5} \cdot 0{,}25 + \frac{4}{5} \cdot 0{,}6$$
$$= 0{,}53$$

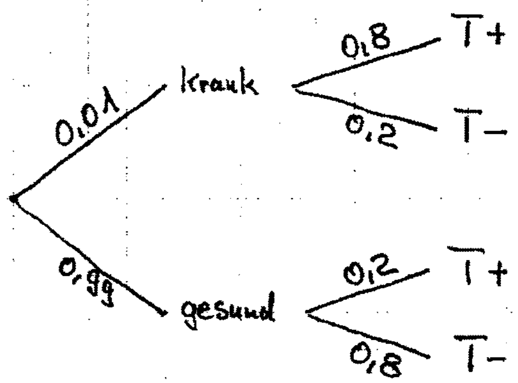
53% aller Menschen im Dorf tragen einen Tirolerhut, also 47% tragen keinen

a) $P(E / H) = \frac{P(E \cap H)}{P(H)} = \frac{0{,}05}{0{,}53} \approx 9{,}4\%$ 1

b) $P(E / \overline{H}) = \frac{P(E \cap \overline{H})}{P(\overline{H})} = \frac{0{,}15}{0{,}47} \approx 31{,}9\%$ 1

Man sollte also einen Menschen ohne Tirolerhut nach dem Weg fragen.

5. Baumdiagramm zur Situation



totale W'

$$P(T+) = P(\text{krank u. } T+) + P(\text{gesund u. } T+)$$
$$= 0{,}01 \cdot 0{,}8 + 0{,}99 \cdot 0{,}2$$
$$= 0{,}206$$

a) $P(\text{krank} / T+) = \frac{P(\text{krank u. } T+)}{P(T+)}$
$$= \frac{0{,}01 \cdot 0{,}8}{0{,}206} \approx 0{,}0388$$

Die W' tatsächlich krank zu sein, wenn der Test positiv ist, beträgt nur 3,9% 1

b) i) $P(\text{krank} / T+) = \dfrac{0{,}01 \cdot 0{,}9}{0{,}01 \cdot \underset{\text{neu}}{0{,}9} + 0{,}99 \cdot \underset{\text{alt}}{0{,}2}} \approx 0{,}0435$ 5

ii) $P(\text{krank} / T+) = \dfrac{0{,}01 \cdot 0{,}8}{0{,}01 \cdot \underset{\text{alt}}{0{,}8} + 0{,}99 \cdot \underset{\text{neu}}{0{,}1}} \approx 0{,}0748$

Wird die Sicherheit von 80% auf 90% gesteigert, so ist der Effekt bei der Erkennung der Gesunden nachhaltiger als bei der Erkennung der Kranken.

Die Investitionen müssen also in die Verbesserung der Spezifität fließen.

2

Summe 18