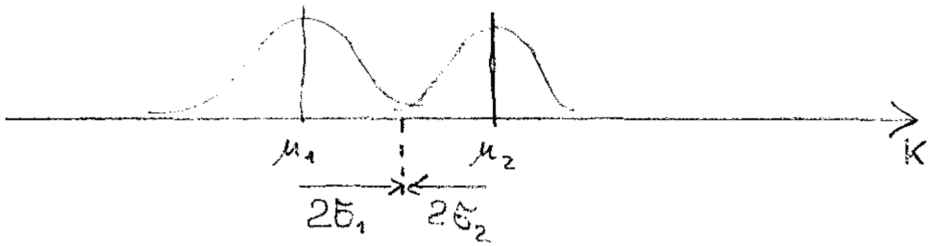
Dr. Reimund Albers Stochastik (FBW) SoSe 08

12. Übung, Lösungsskizzen

1.



Ansatz für die Trennbedingung

$$\mu_1 + 2\sigma_1 = \mu_2 - 2\sigma_2$$

Binomialverteilung: $\mu = n \cdot p \qquad \sigma = \sqrt{np(1-p)}$

hier $\quad p_1 = 0{,}1 \quad \Rightarrow \quad \mu_1 = 0{,}1\,n \qquad \sigma_1 = \sqrt{n \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9} = \sqrt{n} \cdot 0{,}3$

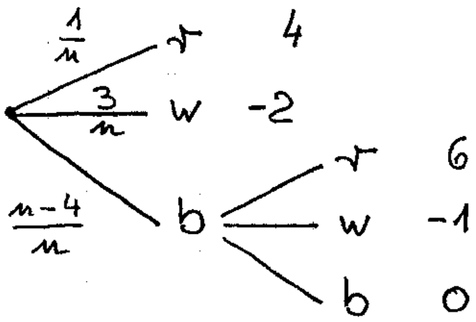
$\quad p_2 = \frac{1}{7} \quad \Rightarrow \quad \mu_2 = \frac{1}{7}\,n \qquad \sigma_2 = \sqrt{n \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{6}{7}} = \sqrt{6n} \cdot \frac{1}{7}$

Ansatz:
$$0{,}1n + 2 \cdot 0{,}3 \cdot \sqrt{n} = \frac{1}{7}n - 2 \cdot \frac{1}{7} \cdot \sqrt{6n} \qquad | : \sqrt{n}$$
$$0{,}1\sqrt{n} + 0{,}6 = \frac{1}{7}\sqrt{n} - \frac{2}{7}\sqrt{6}$$
$$0{,}6 + \frac{2}{7}\sqrt{6} = \sqrt{n}\left(\frac{1}{7} - 0{,}1\right)$$
$$\sqrt{n} = \frac{0{,}6 + \frac{2}{7}\sqrt{6}}{\frac{1}{7} - 0{,}1} \approx \frac{1{,}2999}{0{,}0429}$$
$$\sqrt{n} \approx 30{,}33$$
$$n \approx 919{,}9$$

Man muss 920 Versuche machen, um beide Verteilungen mit den 2σ-Umgebungen um μ zu trennen.

Hausübungen

2. Baumdiagramm



Die Zufallsvariable X kann also die Werte $-2, -1, 0, 4$ und 6 annehmen

a) W'verteilung

k	-2	-1	0	4	6
$P(X=k)$	$\frac{3}{n}$	$\frac{n-4}{n}\cdot\frac{3}{n}$	$\left(\frac{n-4}{n}\right)^2$	$\frac{1}{n}$	$\frac{n-4}{n}\cdot\frac{1}{n}$

2

Summe aller W': $\frac{3}{n} + \frac{(n-4)\cdot 3}{n^2} + \left(\frac{n-4}{n}\right)^2 + \frac{1}{n} + \frac{n-4}{n^2}$

$$= \frac{1}{n^2}\left(3n + 3n - 12 + n^2 - 8n + 16 + n + n - 4\right)$$

$$= \frac{1}{n^2}\left(n^2\right) = 1$$ 1

b) $E(X) = -2\cdot\frac{3}{n} - 1\cdot\frac{3(n-4)}{n^2} + \frac{4}{n} + 6\,\frac{n-4}{n^2}$

$$= \frac{1}{n^2}\left(-6n - 3n + 12 + 4n + 6n - 24\right)$$

$$\underline{\underline{E(X) = \frac{1}{n^2}\left(n - 12\right)}} \overset{!}{=} 0$$ 1

c) Für $n = 12$ beträgt bei diesem Spiel der Erwartungswert für den Gewinn 0

1

3 a) Der Tabelle kann man entnehmen

$P(X=1)=0{,}1$, $P(X=2)=0{,}2$, $P(X=5)=0{,}1$

$P(X=8)=0{,}3$, $P(X=10)=0{,}3$ 1

Dann ist $E(X) = 1\cdot 0{,}1 + 2\cdot 0{,}2 + 5\cdot 0{,}1 + 8\cdot 0{,}3 + 10\cdot 0{,}3$

$= 0{,}1 + 0{,}4 + 0{,}5 + 2{,}4 + 3 = 6{,}4$

$\underline{\underline{E(x) = 6{,}4}}$ 1

$$\operatorname{Var}(x) = \sum_{i=1}^{n} (k_i - E(x))^2\, P(X=k_i)$$

$$= 5{,}4^2\cdot 0{,}1 + 4{,}4^2\cdot 0{,}2 + 1{,}4^2\cdot 0{,}1 + 1{,}6^2\cdot 0{,}3 + 3{,}6^2\cdot 0{,}3$$

$$= 11{,}64$$ 1

$$\sigma = \sqrt{11{,}64} \approx 3{,}41$$ 1

b) Dann ist das Intervall $[\mu - 2\sigma ; \mu + 2\sigma]$ etwa gleich $[-0{,}42 ; 13{,}22]$.
In diesem Intervall liegt die Zufallsvariable mit Sicherheit, also der W' 1. 1

4. Übersetzung der Aufgabe in eine Bernoulli-Kette

Treffer: MA ist da der Firma

$p = 0{,}25$ X: Anzahl der Treffer

$n = 30$ 1

Gesucht ist die Trefferzahl k, für die gilt

~~P(X≤k MA i.d. Firma)~~

$P(X \le k) \le 0{,}95$ 1

$P(X\le k)$ ist die kumulierte W', also

Excel-Tabelle mit $n = 30$ und $p = 0{,}25$ 1

→

Liefert $P(X \leq 11) \approx 0{,}9493$

$P(X \leq 12) \approx 0{,}9784$

Also ist bei 11 Arbeitsplätzen die Bedingung fast erfüllt, bei 12 Arbeitsplätzen ist man auf der sicheren Seite. 1

5.

	Diagr.	
$-0{,}94$	5	
$-0{,}88$	8	nicht sicher entscheidbar
$-0{,}86$	4	
$-0{,}77$	7	
$-0{,}51$	1	
$0{,}56$	3	
$0{,}68$	6	
$0{,}78$	2	

2

6. Es gilt allgemein

$$r = \frac{\sum xy - n\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{\left(\sum xx - n\bar{x}\bar{x}\right)\left(\sum yy - n\bar{y}\bar{y}\right)}}$$

Gegeben sind

x	-1	0	2	3
y	a	0	b	1

Dann ist $\bar{x} = 1$

$\bar{y} = \frac{1}{4}(a+b+1) = 2 \quad \Rightarrow \underline{a+b=7}$ 1

$r = 0{,}1 \Rightarrow r^2 = 0{,}01 = \frac{1}{100}$

$\sum xy = -a + 2b + 3$

$\sum xx = 1 + 4 + 9 = 14$

$\sum yy = a^2 + b^2 + 1$ 1

$$r^2 = \frac{1}{100} = \frac{(-a+2b+3-4\cdot 1\cdot 2)^2}{(14-4\cdot 1\cdot 1)\cdot(a^2+b^2+1-4\cdot 2\cdot 2)} \quad (1)$$

$$10\cdot(a^2+b^2-15) = 100\,(-a+2b-5)^2$$

Mit $a+b=7$ gilt $b=7-a$. Einsetzen, $:10$

$$a^2+(7-a)^2-15 = 10\,(-a+2(7-a)-5)^2$$

$$2a^2-14a+34 = 90a^2-540a+810$$

$\boxed{a \approx 2{,}65}$ oder $\boxed{a \approx 3{,}33}$

also $\boxed{b \approx 4{,}35}$ oder $\boxed{b \approx 3{,}67}$ (2)

2	3	4	5	6	Σ
5	5	4	2	5	21