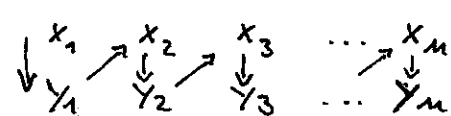


11. Übung, Lösungsskizzen

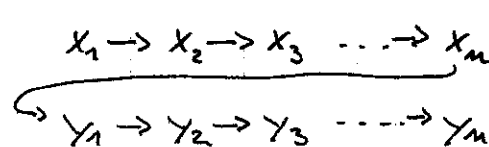
1. a)
$$\sum_{i=1}^m a x_i = a x_1 + a x_2 + \dots + a x_m$$

$$= a(x_1 + x_2 + \dots + x_m) = a \sum_{i=1}^m x_i$$

$$\sum_{i=1}^m (x_i + y_i) \quad \text{Bild}$$



$$\sum_{i=1}^m x_i + \sum_{i=1}^m y_i \quad \text{Bild}$$



Die 2n Summanden werden alle aufsummiert, nur in verschiedener Reihenfolge.

b) Mittelwert
$$\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^m x_i$$
 (alles aufsummieren, dann durch n teilen)

Gleichung mit n multiplizieren

$$n \bar{x} = \sum_{i=1}^m x_i$$

c)

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^n (x_i^2 - 2x_i \bar{x} + \bar{x}^2)$$

Ausmult., binom. Formel

$$= \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\bar{x} \sum_{i=1}^n x_i + \bar{x}^2 \sum_{i=1}^n 1$$

Zerlegen d. Summe (a) 2.)

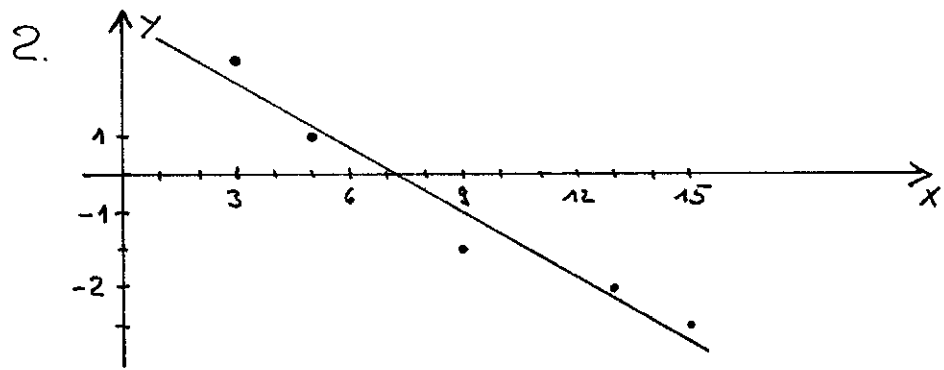
$$= \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\bar{x} \cdot n\bar{x} + \bar{x}^2 \cdot n$$

b) und Ausrechn. der letzten Summe

$$= \sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2$$

2. und 3. Summand zusammenf.

HAUSÜBUNG



(1)

b) $\bar{x}_i = 45 : 5 = 9$
 $\bar{y}_i = -5 : 5 = -1$

(1)

| | | | | | Summe | | |
|----|-----------|--------------|--------------|----------------|-------|-----|------|
| c) | x_i | 3 | 5 | 9 | 13 | 15 | |
| | y_i | 3 | 1 | -2 | -3 | -4 | |
| | x_i^2 | 9 | 25 | 81 | 169 | 225 | 509 |
| | $x_i y_i$ | 9 | 5 | -18 | -39 | -60 | -103 |

$$a = \frac{\sum xy - n \bar{x} \bar{y}}{\sum x^2 - n \bar{x}^2} = \frac{-103 - 5 \cdot 9 \cdot (-1)}{509 - 5 \cdot 9 \cdot 9} = \frac{-58}{104} \approx -0,558$$

(1)

$$b = \bar{y} - a \bar{x} = -1 + \frac{58}{104} (9) \approx 4,019$$

Regressionsgerade: $y \approx -0,558x + 4,019$ (1)

d) $y + 1 = m(x - 9)$
 $y_i^* = m(x_i - 9) - 1$

| | | | | | |
|---------|---------|---------|----|--------|--------|
| x_i | 3 | 5 | 9 | 13 | 15 |
| y_i | 3 | 1 | -2 | -3 | -4 |
| y_i^* | $-6m-1$ | $-4m-1$ | -1 | $4m-1$ | $6m-1$ |

(1)

$$S(m) = [3 - (-6m - 1)]^2 + [1 - (-4m - 1)]^2 + [-2 - (-1)]^2 + [-3 - (4m - 1)]^2 + [-4 - (6m - 1)]^2$$

$$S(m) = [6m+4]^2 + [4m+2]^2 + 1 + [-4m-2]^2 + [-6m-3]^2$$

$$= 36m^2 + 48m + 16 + 16m^2 + 16m + 4 + 1 + 16m^2 + 16m + 4 + 36m^2 + 36m + 9$$

$$= 104m^2 + 116m + 34 \quad (1)$$

$$S'(m) = 208m + 116 = 0$$

$$m = -\frac{116}{208} = -\frac{29}{52} \approx -0,558$$

Dieser Wert stimmt gut mit der Steigung in a) überein und ist genau der Wert für die Steigung a in c. (1)

e) siehe Extra Blatt (2)

3. $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$ Klammern ausmultipl.

$$= \sum_{i=1}^n (x_i y_i - x_i \bar{y} - \bar{x} y_i + \bar{x} \bar{y})$$
 Summe aufteilen

$$= \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \bar{y} - \sum_{i=1}^n \bar{x} y_i + \sum_{i=1}^n \bar{x} \bar{y}$$
 konst Faktoren auskl.

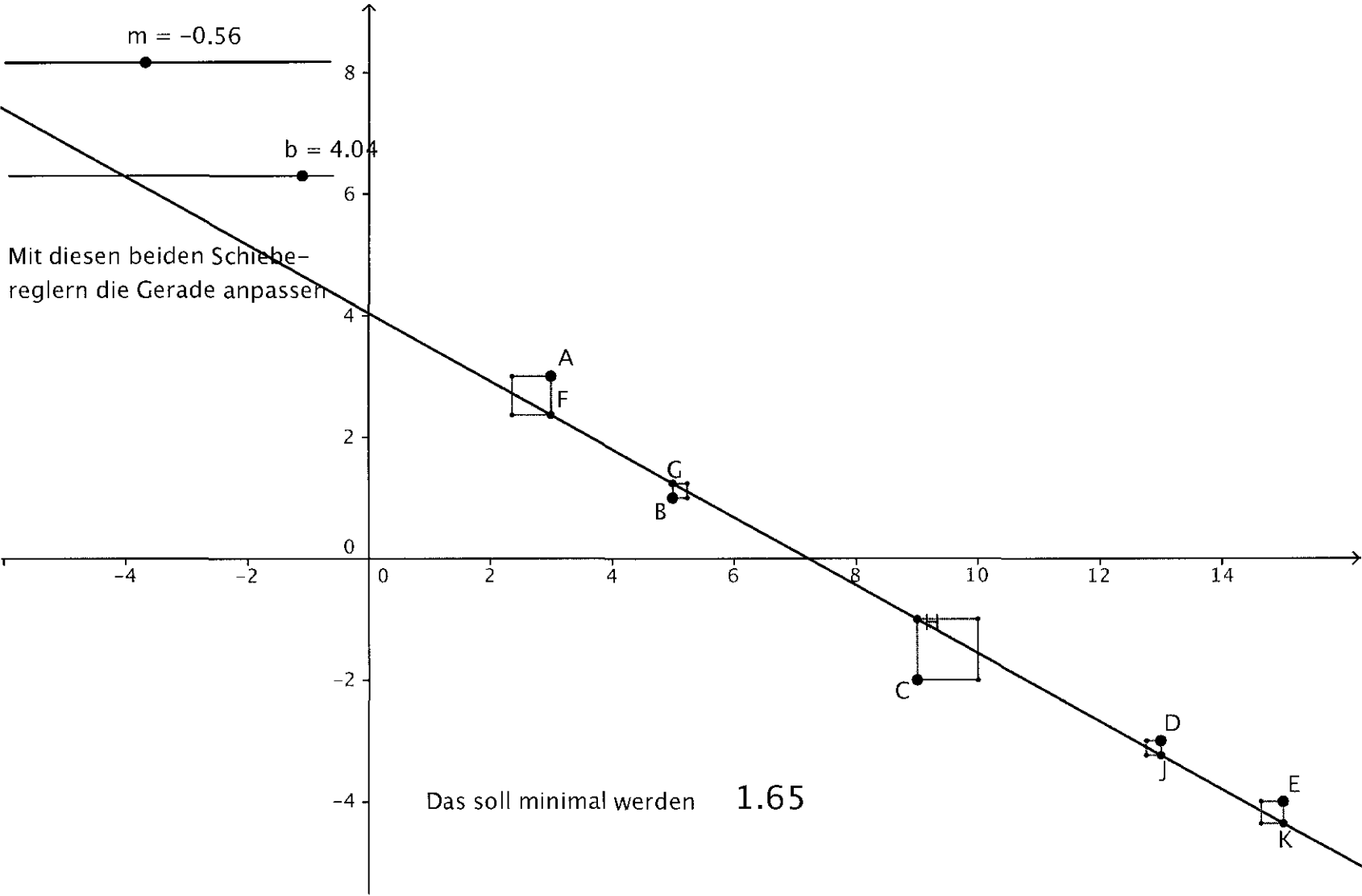
$$= \sum_{i=1}^n x_i y_i - \bar{y} \sum_{i=1}^n x_i - \bar{x} \sum_{i=1}^n y_i + \bar{x} \bar{y} \sum_{i=1}^n 1$$
 Mittelwerte einführen

$$= \sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{y} \bar{x} - n \bar{x} \bar{y} + n \bar{x} \bar{y}$$

$$= \sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}$$
 (2)

| | Summe | | | | | | | | |
|---------------------|-------|---|----|----|----|----|-----|---------------|--|
| x_i | 2 | 3 | 6 | 9 | 10 | 12 | 42 | $\bar{x} = 7$ | |
| y_i | 1 | 2 | 2 | 3 | 5 | 5 | 18 | $\bar{y} = 3$ | |
| $x_i y_i$ | 2 | 6 | 12 | 27 | 50 | 60 | 157 | | |
| $n \bar{x} \bar{y}$ | | | | | | | | | |

Maßstab in cm: 1:1



Mit diesen beiden Schiebern die Gerade anpassen

Das soll minimal werden 1.65

$$\sum_{i=1}^6 x_i y_i - n \bar{x} \bar{y} = 157 - 6 \cdot 7 \cdot 3 = 31 \quad (1)$$

| | | | | | | | |
|----------------------------------|----|----|----|---|---|----|-------|
| $x_i - \bar{x}$ | -5 | -4 | -1 | 2 | 3 | 5 | Summe |
| $y_i - \bar{y}$ | -2 | -1 | -1 | 0 | 2 | 2 | |
| $(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$ | 10 | 4 | 1 | 0 | 6 | 10 | 31 |

In diesem Beispiel ist $\sum_{i=1}^6 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 31$, also sind beide Seiten gleich. (1)

4. $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{25}$

$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$ also $\frac{1}{25} = 0,34 \cdot P(A|B)$

a) $P(A|B) = \frac{1}{25} \cdot \frac{100}{34} = \frac{2}{17} \approx 0,118 \quad (1)$

b) $P(\bar{A}|\bar{B}) \cdot P(\bar{B}) = P(\bar{A} \cap \bar{B})$

ebenso

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) \cdot P(\bar{B}|A) = P(A) \cdot [1 - P(B|A)]$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{25}$$

$$= P(\bar{B}) \cdot P(A|\bar{B})$$

$$\Rightarrow P(A|\bar{B}) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{P(A \cap \bar{B})}{1 - P(B)}$$

$$= \frac{4}{25} : 0,66 = \frac{4}{25} \cdot \frac{100}{66} = \frac{16}{66} = \frac{8}{33} \approx 0,242$$

$$P(\bar{A}|\bar{B}) = 1 - P(A|\bar{B}) = 1 - \frac{8}{33} = \frac{25}{33} \approx 0,758$$

(2)

| | | | |
|---|---|---|----------|
| 2 | 3 | 4 | Σ |
| 9 | 4 | 3 | 16 |