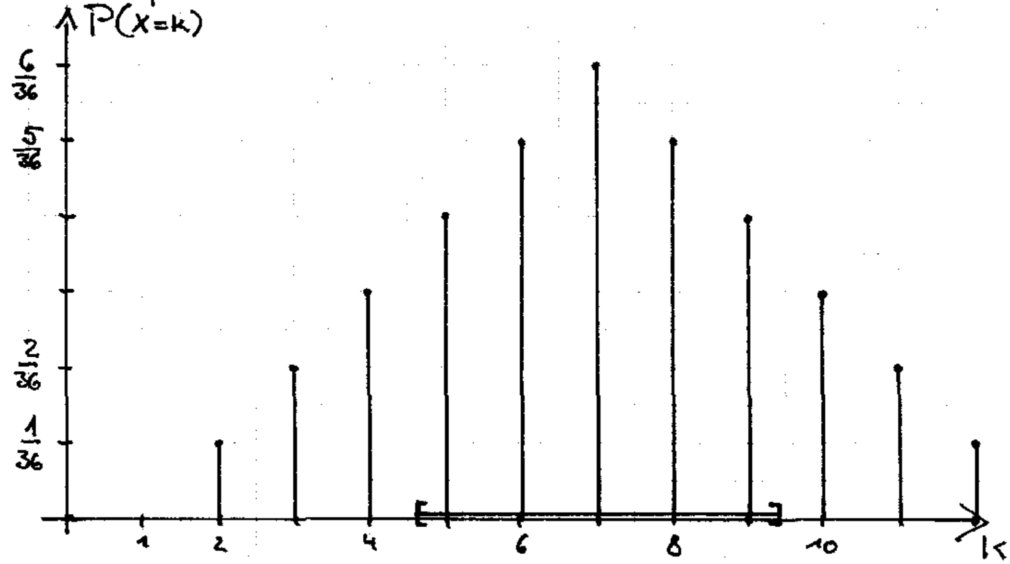
Dr. Reimund Albers Stochastik (BA FBW) SoSe 08

10. Übung Lösungsskizzen

Präsenzübung

1. Zufallsvariable X: ~~Anzahl der~~ Augensumme der Würfel

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X=k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$



$$E(X) = \mu = \frac{1}{36}\left(1\cdot 2 + 3\cdot 2 + 4\cdot 3 + 5\cdot 4 + 6\cdot 5 + 7\cdot 6 + 8\cdot 5 + 9\cdot 4 + 10\cdot 3 + 11\cdot 2 + 12\cdot 1\right)$$

$$= \frac{252}{36} = 7$$

$$\mathrm{Var}(X) = \underbrace{\frac{25}{36} + 16\cdot\frac{2}{36} + 9\cdot\frac{3}{36} + 4\cdot\frac{4}{36} + 1\cdot\frac{5}{36}}_{2\cdot} + 0 = \frac{1}{18}\cdot 105 \approx 5{,}83$$

$$\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}(X)} \approx 2{,}42$$

Im Intervall $[\mu-\sigma;\ \mu+\sigma]$ liegen $\left(\frac{4}{36}+\frac{5}{36}\right)\cdot 2 + \frac{6}{36} = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$

HAUSÜBUNGEN

2a) $n = 30 \quad p = 0{,}3 \quad \Rightarrow \mu = 9 \quad \sigma = \sqrt{30 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7} \approx 2{,}51$

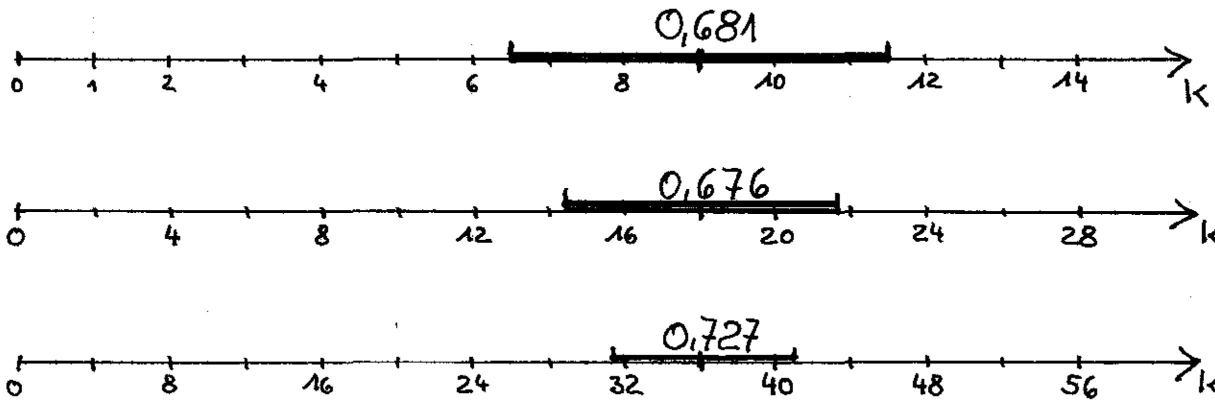
$[\mu - \sigma ; \mu + \sigma]$ enthält $k = 7, 8, 9, 10, 11 \quad P(7 \leq X \leq 11) \approx 0{,}681$ 1

b) $n = 60 \quad p = 0{,}3 \quad \Rightarrow \mu = 18 \quad \sigma = \sqrt{60 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7} \approx 3{,}55$

$[\mu - \sigma ; \mu + \sigma]$ enthält $k = 15, 16, \ldots, 21 \quad P(15 \leq X \leq 21) \approx 0{,}676$ 1

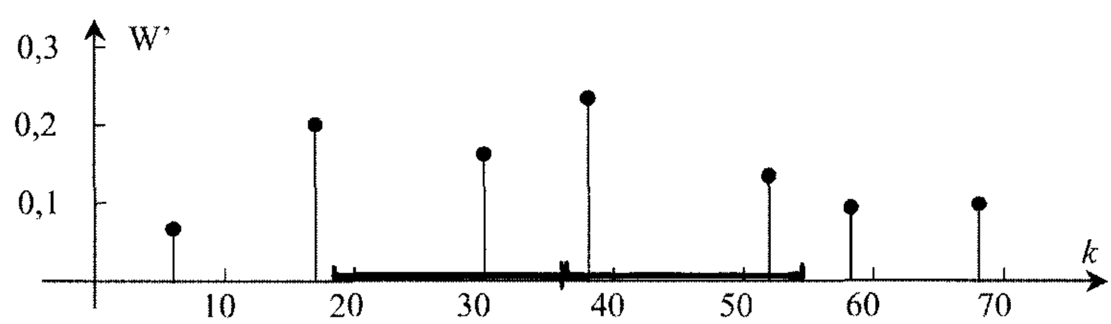
c) $n = 120 \quad p = 0{,}3 \quad \Rightarrow \mu = 36 \quad \sigma = \sqrt{120 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7} \approx 5{,}02$

$[\mu - \sigma ; \mu + \sigma]$ enthält $k = 31, 32, \ldots, 41 \quad P(31 \leq X \leq 41) \approx 0{,}727$ 1



1

3.



$k =$	7	18	30	38	51	59	69
$P(X=k)$	0,07	0,20	0,18	0,23	0,14	0,09	0,09

1

$E(X) = 0{,}49 + 3{,}6 + 5{,}4 + 8{,}74 + 7{,}14 + 5{,}31 + 6{,}21 = 36{,}89$

$Var(X) \approx 62{,}54 + 71{,}37 + 8{,}54 + 0{,}28 + 27{,}87 + 44{,}00 + 92{,}79 = 307{,}4$

$\sigma \approx 17{,}53$

1

4. a) Zufallsvariable X: Anzahl der Übernacht.

Bernoulli-Kette $n = 60$ $p = 0{,}8$

$E(X) = n \cdot p = 48$ Übernachtungen

$\Rightarrow E(\text{Einnahmen}) = 48 \cdot 55€ = 2640€$ 1

b) Es kommen 61 bis 66 Gäste

$P(X > 60) = 1 - P(X \leq 60)$

Nun ist aber $n = 66$ $p = 0{,}8$

$P(X > 60) \approx 1 - 0{,}995015 = 0{,}004985$ 1

In ca 0,5% aller Nächte kommt das Hotel in Verlegenheit

c)

$k =$	0 ... 60	61 66
$P(X=k)$	$Bin(k; 66; 0{,}8)$	$Bin(k; 66; 0{,}8)$
Einn.	$k \cdot 55$	$61 \cdot 55 - 70$ $\quad$ $66 \cdot 55 - 6 \cdot 70$

Der Erwartungswert für die Einnahmen ist nun

$E(\text{Einnahmen}) = 55 \cdot 66 \cdot 0{,}8 = 2904$ 1

Davon muss man den Erwartungswert für die Kosten der Ausweichquartiere abziehen

$k =$	61	62	63	64	65	66
$P(X=k)$ Excel $n=66, p=0{,}8$	0,003506	0,001131	0,000287			
$70 \cdot k \cdot P(X=k)$ $(k-60)$	0,245	0,158	0,060	0,015	0,002	0,000

$E(\text{Kosten}) \approx 0{,}48$ 2

Der Erwartungswert für die Nettoeinnahmen ist folglich $2904 € - 0{,}48 € = 2903{,}52 €$ 1

Es lohnt sich eindeutig, 66 Zusagen zu geben.

5. a) $p_1 = 0{,}15$ n ist gesucht

$\mu_1 = 0{,}15\, n$ $\sigma_1 = \sqrt{n \cdot 0{,}15 \cdot 0{,}85} = \sqrt{0{,}1275} \cdot \sqrt{n}$

$p_2 = \frac{1}{6}$

$\mu_2 = \frac{1}{6} n$ $\sigma_2 = \sqrt{n \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}} = \frac{\sqrt{5}}{6} \cdot \sqrt{n}$

Da $\mu_1 < \mu_2$, ist der Ansatz für die disjunkten Intervalle (1)

$$\mu_1 + \sigma_1 = \mu_2 - \sigma_2$$

$$0{,}15 n + \sqrt{0{,}1275}\sqrt{n} = \frac{1}{6} n - \frac{\sqrt{5}}{6}\sqrt{n} \quad \Big|: \sqrt{n}\text{, ordnen}$$

$$\left(0{,}15 - \frac{1}{6}\right)\sqrt{n} = -\sqrt{0{,}1275} - \frac{\sqrt{5}}{6}$$

$$\sqrt{n} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{6} + \sqrt{0{,}1275}}{\frac{1}{6} - 0{,}15} \approx 43{,}78 \quad \Big|\text{ quadr.}$$

$$n \approx 1917{,}1$$ (2)

Man muss also mindestens 1918 Würfe mit dem Würfel machen, um die beiden fraglichen σ-Umgebungen zu trennen.

b) Für $n = 1918$ gilt

$\mu_1 = 287{,}7$ $\sigma_1 \approx 15{,}64$ $\mu_1 + \sigma_1 \approx 303{,}3$

$\mu_2 \approx 319{,}7$ $\sigma_2 \approx 16{,}32$ $\mu_2 - \sigma_2 \approx 303{,}3$

Entscheidungsregel:

Zeigt der Würfel in den 1918 Versuchen 303 oder weniger „Sechs", so gilt er als falsch und der Spieler ist zu verurteilen. (1)

Die W' für ein Fehlurteil ist dann

$P(X \leq 303)$ für X Anzahl der „Sechs", $p = \frac{1}{6}$ →

und $n = 1918$

$$P(X \leq 303) = \sum_{k=0}^{303} \binom{1918}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{1918-k}$$

Excel: BINOMVERT(303; 1918; 0,1666667; WAHR)

$\approx 0{,}161$

Es kommt also mit einer W' von ca. 16%
zu einem Fehlurteil

1

2	3	4	5	Σ
4	2	6	5	17