Dr. Reimund Albers, Stochastik (BA FBW) SoSe 08

9. Übung Lösungsskizzen

1.

a) $P(X=7)$ für $n=96$ und $p=0{,}15$

$= 0{,}010646$

b) Die Tabelle ist unbrauchbar für $n \neq 96$ und $p \neq 0{,}15$. Man kann also nicht ablesen $P(X=9)$ für $n=10$ und $p=0{,}25$

c) „Kumuliert" ist die Aufsummierung der Werte für $k=0$ bis <u>einschließlich</u> der Zeile, in der man abliest.

Kumuliert $k=10$ ist die Summe in der Spalte $Bin(k,n,p)$ von 0 bis einschl. $k=10$

d) Die Kreuze sind eine sehr einfache grafische Veranschaulichung der Werte für $Bin(k,n,p)$, gerundet auf zwei Stellen h.d. Komma

2. $\mu = n \cdot p = 96 \cdot 0{,}15 = 14{,}4$

$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{96 \cdot 0{,}15 \cdot 0{,}85} \approx 3{,}5$

a) $[\sigma + \mu \, ; \, \sigma + \mu] \approx [10{,}9 \, ; \, 17{,}9]$

b) $P(10{,}9 \leq X \leq 17{,}9) = P(X \leq 17) - P(X \leq 10)$

$\approx 0{,}814373 - 0{,}130118$

$= 0{,}684255 \approx 68{,}4\,\%$

HAUSÜBUNGEN

3 a) Exceltabelle aufrufen mit $n = 24$, $p = 0{,}28$
ablesen bei $k = 7$: $0{,}175374$ (1)

b) Exceltabelle aufrufen mit $n = 75$, $p = 0{,}4$

$P(X \geq 21) = 1 - P(X \leq 20)$ ablesen bei kumul. $k = 20$
$\approx 1 - 0{,}011187$
$= 0{,}988813$ (1)

c) Exceltabelle aufrufen mit $n = 140$, $p = 0{,}714$
$P(95 \leq X \leq 111) = P(X \leq 111) - P(X \leq 94)$
$\approx 0{,}986704 - 0{,}153647$
$= 0{,}833057$ (1)

4. A: $E(\text{Verlust}) = 0{,}15 \cdot 1{,}2$ Mio $= 180.000$ (1)

B: $E(\text{Anz. der Überfälle}) = n \cdot p = 6 \cdot 0{,}15 = 0{,}9$
pro Überfall ist der Verlust $1.200.000 : 6 = 200.000$
also $E(\text{Verlust}) = 0{,}9 \cdot 200.000 = 180.000$ (1)

Beide Strategien haben für die Höhe des Verlustes den gleichen Erwartungswert. (1)

5. Bernoullikette mit $n = 30$
Treffer: „ist pünktlich" p ist zu bestimmen
Gegeben $P(X \geq 29) = 0{,}15$
$P(X \geq 29) = P(X = 30) + P(X = 29) = 1 - P(X \leq 28)$
$= p^{30} + 30\,p^{29}(1-p)$ (1)

Zwei Lösungswege
1. Excel-Tabelle $n = 30$ p so einstellen,
dass $P(X \leq 28)$ etwa 0,85 ist

Versuche						
p	0,8	0,7	0,9	0,85	0,89	0,885
$P(X\leq 28)$	0,989	0,999	0,816	0,952	0,857	0,837

Also beträgt die indiv. Pünktlichkeitsw' ca 89 %

(2)

2. Lösungsweg

Man löst die Gleichung $p^{30} + 30p^{29}(1-p) = 0,15$

durch Probieren oder mit d. Taschenrechner

$\rightarrow p \approx 0,8919 = 89,19\,\%$

6. a) $v(1) = \sum_{i=1}^{5} (x_i - 1)^2 \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{5} \cdot (4 + 1 + 0 + 4 + 81)$

$= 18$

$V(2) = \sum_{i=1}^{5} (x_i - 2)^2 \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{5}(9 + 4 + 1 + 1 + 64)$

$= \frac{79}{5} = 15,8$

$V(3) = \sum_{i=1}^{5} (x_i - 3)^2 \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{5}(16 + 9 + 4 + 0 + 49)$

$= \frac{78}{5} = 15,6$

(2)

b) $v(m) = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^{5} (x_i - m)^2$

Das ist eine Funktion für m, die x_i, $i = 1, 2, \dots, 5$ werden als Konstante betrachtet.

Ableiten nach m (Kettenregel)

$v'(m) = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^{5} 2 \cdot (x_i - m) \cdot (-1)$ (1)

Ableitung Null setzen

$\frac{1}{5} \sum_{i=1}^{5} 2(x_i - m)(-1) = 0 \quad \Big| \cdot -\frac{5}{2}$ (1)

$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{5} (x_i - m) = 0$

$\Leftrightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - 5m = 0$

$\Leftrightarrow m = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}{5}$ (1)

Also gibt es für $m = \mu = \frac{1}{5}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)$ eine Stelle mit Ableitung 0

2. Ableitung

$$V''(m) = -\frac{2}{5} \sum_{i=1}^{5} (-1)$$

$$= -\frac{2}{5} \cdot (-5) = +2$$

1

Also ~~ist~~ hat v bei $m = \mu$ tatsächlich ein Minimum, $m = \mu$ ist das gesuchte m^*.

Die Varianz bezüglich des Wertes m wird minimal, wenn m gerade den Mittelwert μ annimmt. 1

3	4	5	6	Σ
3	3	3	7	16