Dr. Reimund Albers, Stochastik (BA FBW) SoSe 08

5. Übung Lösungsskizzen

1. a) Rechnung über das Gegenereignis

$\bar{A}$ = „Jeder Gast hat an einem anderen Tag Geburtstag"

$$P(\bar{A}) = \frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot \ldots \cdot \frac{346}{365} \approx \frac{1{,}0367 \cdot 10^{51}}{1{,}7613 \cdot 10^{51}} \approx 0{,}589$$

Also $P(A) = 1 - P(\bar{A}) \approx 0{,}411$

b) $$P(\bar{A}_n) = \frac{365 \cdot 364 \cdot \ldots (365-(n-1))}{365^n}$$

$$P(A_n) = 1 - P(\bar{A}_n)$$

c) Taschenrechner:

n	10	20	30	40	50	60
$P(A_n)$	~~0,883~~ 0,117	0,411	0,706	0,891	0,970	0,994

25
0,569

45
0,941

55
0,986

$n \geq 23$ $P(A_n) > 0{,}5$

$n \geq 41$ $P(A_n) > 0{,}9$

$n \geq 57$ $P(A_n) > 0{,}99$

2. a) 8 Dinge, davon zwei Mal 2 gleich

Permutationen: $\frac{8!}{2!\,2!} = 10080$

b) Bei „JACKE" werden 5 Buchstaben genutzt, 3 bleiben übrig, nämlich A, F, F

Position von JACKE kann in den 8 Buchstaben variiert werden

JACKE... 3 Möglichk. .JACKE.. 3 Mögl.

..JACKE. 3 Möglichk. ...JACKE 3 Mögl.

Also taucht „JACKE" 12 Mal in der Liste auf.

c) Das erste 8-buchstabige Wort in der Liste ist AFFJACKE

A....... $\left(\frac{7!}{2!} = 2520\right)$

AA...... $\frac{6!}{2!} = 360$

AC...... $\frac{6!}{2!} = 360$

AE...... 360

AF...... $(6! = 720)$

AFA..... $5! = 120$

AFC..... $5! = 120$

AFE..... $5! = 120$

AFF..... $(5! = 120)$

AFFA.... $4! = 24$

AFFC.... $4! = 24$

AFFE.... $4! = 24$

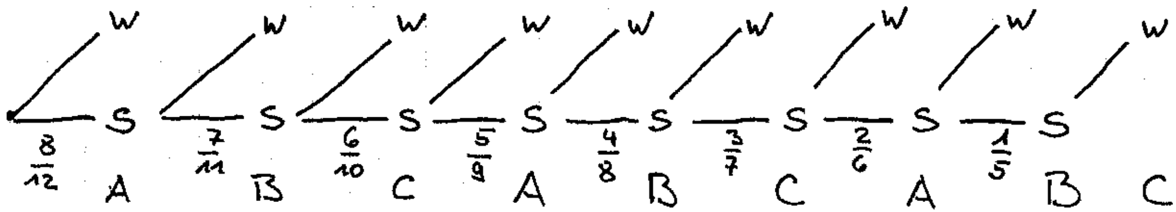
AFFJ.... $(4! = 24)$

Also stehen vor AFFJACEK $360 \cdot 3 + 120 \cdot 3 + 24 \cdot 3 = 1512$ Wörter

1513: AFFJACEK <u>1514: AFFJACKE</u>

HAUSÜBUNGEN

3.



$$P(\text{A gewinnt}) = \frac{4}{12} + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 4}{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9} + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4}{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{56}{495} + \frac{2}{99} = \frac{7}{15} \approx 0{,}467$$

$$P(\text{B gewinnt}) = \frac{8}{12} \cdot \frac{4}{11} + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8} + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4}{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}$$

$$= \frac{8}{33} + \frac{14}{198} + \frac{4}{495} = \frac{53}{165} \approx 0{,}321$$

$$P(\text{C gewinnt}) = \frac{8 \cdot 7 \cdot 4}{12 \cdot 11 \cdot 10} + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 4}{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7} + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4}{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}$$

$$= \frac{28}{165} + \frac{4}{99} + \frac{1}{495} = \frac{7}{33} \approx 0{,}212$$

4.

Anz blanck	ein Tupel	Permutat.	Pfad w'
0	(s, s, w, w)	$\frac{4!}{2!2!} = 6$	$\frac{2\cdot 1\cdot 2\cdot 1}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3} = \frac{1}{90}$
1	(b, s, w, w)	$\frac{4!}{2!} = 12$	$\frac{2\cdot 2\cdot 2\cdot 1}{\cancel{6}_3\cdot 5\cdot 4\cdot 3} = \frac{1}{45}$
	$(b, \cancel{s}, s, w)$	12	$\frac{1}{45}$
2	(b, b, s, s)	6	$\frac{2\cdot 1\cdot 2\cdot 1}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3} = \frac{1}{90}$
	(b, b, w, w)	6	$\frac{1}{90}$
	(b, b, s, w)	12	$\frac{1}{45}$

$P(0 \text{ blanck}) = 6 \cdot \frac{1}{90} = \frac{1}{15}$

$P(1 \text{ blanck}) = \overset{4}{\cancel{12}} \cdot \frac{1}{\underset{15}{\cancel{45}}} + 12 \cdot \frac{1}{45} = \frac{8}{15}$

$P(2 \text{ blanck}) = 6 \cdot \frac{1}{90} + 6 \cdot \frac{1}{90} + 12 \cdot \frac{1}{45} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$

alternative Lösung zur Tabelle oben:
Baumdiagramm

5. a) Kombinatorische Überlegung

Die n Elemente werden angeordnet

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, \ldots, n\}$
$(0, 1, 1, 0, \ldots, 1)$

In einem n-Tupel schreibt man auf jeden Platz 0, wenn das Element nicht für eine Teilmenge ausgewählt wird, und 1, wenn es gewählt wird. So wird jeder Teilmenge von Ω eindeutig ein n-Tupel mit 0;1 zugeordnet

Es gibt 2^n Tupel dieser Art, also auch 2^n Teilmengen.

b) Vollständige Induktion

Indukt. Anfang: $\Omega = \{1\}$ $|\Omega| = 1$

$$\wp(\Omega) = \{\emptyset, \{1\}\} \quad \text{also } |\wp(\Omega)| = 2^1 = 2$$

Induktionsvor.: $|\Omega| = n \Rightarrow |\wp(\Omega)| = 2^n$

Induktionsbeh.: $|\Omega| = n+1 \Rightarrow |\wp(\Omega)| = 2^{n+1}$

Induktionsbeweis:

$|\Omega| = n+1$ also $\Omega = \{1, 2, 3, \dots n+1\}$

$$= \{1, 2, 3, \dots n\} \cup \{n+1\}$$

Aus den ersten n Elementen kann man nach Ind-voraussetzung 2^n Teilmengen bilden. Alle diese enthalten das Element n+1 <u>nicht</u>. Jede dieser Teilmengen wird mit $\{n+1\}$ vereinigt. Das sind alle Teilmengen von Ω die n+1 <u>enthalten</u>.

Also $|\wp(\Omega)| = 2^n + 2^n = 2^{n+1}$

alle Teilmengen

ohne mit dem Element n+1

Damit ist der Schritt von n auf n+1 bewiesen.

6. a) $$\binom{49}{6} = \frac{49 \cdot \cancel{48}^{\,8\;4} \cdot 47 \cdot 46 \cdot \cancel{45}^{\,9\;3} \cdot \cancel{44}^{\,11}}{1 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{6}} = 13.983.816$$

b) Der komplette Tip kostet

$13.983.816 \cdot 0{,}75\ € = 10.487.862\ €$

6

c)

Gewinne	Anzahl
6 Richtige	1
5 Richt. m.Z.	$\binom{6}{5}\binom{1}{1}\binom{42}{0} = 6$
5 Richt	$\binom{6}{5}\binom{1}{0}\binom{42}{1} = 252$
4 Richt. m.Z.	$\binom{6}{4}\binom{1}{1}\binom{42}{1} = 630$
4 Richt	$\binom{6}{4}\binom{1}{0}\binom{42}{2} = 12\,915$
3 Richt m.Z.	$\binom{6}{3}\binom{1}{1}\binom{42}{2} = 17\,220$
3 Richt	$\binom{6}{3}\binom{1}{0}\binom{42}{3} = 229\,600$
d) 2 Richtige	$\binom{6}{2}\binom{43}{4} = 1\,851\,150$
1 Richtig	$\binom{6}{1}\binom{43}{5} = 5\,775\,588$
0 Richtig	$\binom{6}{0}\binom{43}{6} = 6\,096\,454$
	$13\,983\,816$

c)

Gewinnart	Anzahl d. Tipps		Gewinn pro Tipp		Gesamt
6R	1	·	1.753.154,80€	=	1.753.154,80€
5RmZ	6	·	92.260,00€	=	553.560,00€
5R	252	·	3 295,00€	=	830.340,00€
4RmZ	630	·	194,70€	=	122.661,00€
4R	12 915	·	40,50€	=	523.057,50€
3RmZ	17 220	·	25,20€	=	433.944,00€
3R	229 600	·	10,40€	=	2 387.840,00€
					6.604.557,30€

Bilanz: ~~Ein~~ Gewinn − Einsatz = −3.883.304,70€