Sommersemester 2007
Dr. Reimund Albers

Stochastik
für Elementarmathematik in FBW

10. Übung
Erwartungswert und Streuung

Präsenzübungen (für Mo/Mi 25./27.6.)

1. Beim Glücksspiel „Keno“ werden ähnlich wie bei unserem Lotto Zahlen als Glückszahlen gezogen, allerdings 20 aus 80 (amerikanische Form, in Deutschland gibt es Keno mit 70 Zahlen). Während bei unserem Lotto immer genau 6 Zahlen angekreuzt werden müssen (sonst ist der Tipp ungültig), darf man beim Keno selbst entscheiden, wie viele Zahlen man ankreuzen möchte, von 1 bis maximal 20 der 80 Zahlen auf einem Tippschein. Der Einsatz ist $1, die Auszahlung erfolgt nach folgender Tabelle (Beispiel, die Casinos machen sich durch unterschiedliche Auszahlungslisten Konkurrenz).

angekreuzte Zahlen	richtige Zahlen	Auszahlung
1	1	3
2	2	12
3	2	1
	3	42
4	2	1
	3	3
	4	115
5	3	1
	4	23
	5	500
6	3	1
	4	3
	5	88
	6	1500
7	4	1
	5	20
	6	400
	7	6000
Tabelle unvollständig		

Berechnen Sie für 1 bis 7 angekreuzte Zahlen jeweils den Erwartungswert für die Auszahlung und entscheiden Sie so, welche Zahl von Kreuzen (1 bis 7) die aussichtsreichste ist.

2. Eine Zufallsgröße X nehme die aufgelisteten Werte mit der angegebenen W’ an.

Werte für X: $k=$	-3	-1	0	1	5	10
W’ für $X=k$	0,1	0,2	0,3	0,2	...	...

Berechnen Sie die fehlenden W’ so, dass der Erwartungswert gleich 0 ist. Berechnen Sie dann Varianz und Streuung.

Hausübungen (Abgabe: Do, 28.6.)

3. Erkenntnisse zur Binomialverteilung
   a. Berechnen Sie für die Bernoulli-Kette der Länge $n = 24$ und der Trefferw' $p = 0{,}4$ den Erwartungswert μ und die Streuung σ. Wie groß ist die W', dass die Trefferzahl in dem Intervall $[\mu-\sigma;\mu+\sigma]$ liegt?
   b. Rechen Sie ebenso mit n = 48 und $p = 0{,}4$.
   c. Rechen Sie ebenso mit n = 96 und $p = 0{,}4$.

4. Transport von Gold unter unsicheren Bedingungen
   In einem Krisengebiet soll Gold im Wert von $1.000.000 transportiert werden. Die W' für einen Überfall wird auf 0,1 geschätzt. Wird ein Transport überfallen, so ist das gesamte transportierte Gold verloren. Es werden nun zwei Strategien erwogen:
   A: Man transportiert alles Gold auf einmal.
   B: Man teilt das Gold auf 5 gleich große Teile auf und führt 5 Transporte mit jeweils einem Teil durch.
   Berechnen Sie für beide Strategien den Erwartungswert für den Verlust durch Überfälle und entscheiden Sie, welche Strategie die günstigere ist.

5. Massentest
   Für das Erkennen einer Krankheit muss ein Bluttest durchgeführt werden. Gleichzeitig hat man sehr viele Leute zu untersuchen (z.B. Musterung, Reihenuntersuchung). Man untersucht nun nicht jede Blutprobe einzeln, sondern mischt k Proben zusammen und untersucht die Mischung (Gesamtprobe). Zeigt wenigstens eine der k Proben die Krankheit, so zeigt auch die Mischung diese Krankheit an. Dann müssen noch einmal alle k Proben dieser Mischung einzeln untersucht werden, so dass man insgesamt k+1 Untersuchungen hat. Sind dagegen alle k Einzelproben der Mischung gesund, zeigt dass die eine Untersuchung der Mischung und man hat insgesamt k-1 Untersuchung eingespart.
   a. Rechnen Sie für eine Krankheitsw' von 0,01 und der Mischung von k = 5, k = 10 und k = 20 den Erwartungswert für die Anzahl der notwendigen Untersuchungen.
   b. Bestimmen Sie durch gezieltes Probieren oder formales Rechnen (Differentialrechnung, Extremwertproblem) die optimale Zahl k für die Anzahl der Proben, die zusammengemischt werden, so dass der Erwartungswert minimal wird.

6. Gegeben ist eine Zufallsgröße X, die mit gleicher W' die Werte x_1, x_2, x_3 und x_4 annehmen kann. Wir definieren $v(m)$ als Varianz bezüglich des „unbestimmten Wertes m“ ($m \in \mathbb{R}$) durch $v(m) = \sum_{i=1}^{4} \left(x_i - m\right)^2 \cdot P(X = x_i)$. Für welchen Wert $m^* \in \mathbb{R}$ (in Abhängigkeit von x_1, x_2, x_3 und x_4) wird $v(m)$ minimal?