Strategien der besten Wahl

Wer anspruchsvoll ist, will immer nur das Beste. Aber wehe dem, der das Beste verschmäht, weil er auf Besseres hofft – und es kommt nichts Besseres!

Von F. Thomas Bruss

Vielleicht sind Sie mit dem Kauf Ihres Autos sehr froh. Kurz danach kommt ein neues auf den Markt, das Ihnen noch besser gefällt, und Sie ärgern sich. Bei der nächsten Gelegenheit zögern Sie, weil man ja nicht weiß, ob es in Zukunft ein noch besseres Angebot geben wird – und ärgern sich, weil Sie eine einmalige Gelegenheit haben verstreichen lassen. Gibt es eine Entscheidungsstrategie für Anspruchsvolle, die immer nur das Beste wollen?

Ein Zettelspiel als Einführung

Ihre Frau legt ein Päckchen mit zehn Zetteln auf den Tisch und erklärt: »Ich habe auf die Rückseiten dieser Zettel verschiedene Zahlen geschrieben und sage dir nichts über diese Zahlen. Jede nur denkbare Zahl und Reihenfolge ist möglich. Du darfst mischen, ohne auf die Zahlen zu schauen.« – Sie tun es. – »Nun darfst du eine Zahl nach der andern aufdecken und genau eine wählen – und zwar sofort nach dem Aufdecken; später gilt nicht. Danach decken wir alle Zahlen auf und vergleichen. Wenn du die größte Zahl gewählt hast, gewinnst du, sonst verlierst du.«

»Verliere ich bei der zweitgrößten?«

»Ja, nur die größte gewinnt, und wenn du keine wählst, verlierst du auch.«

Dass Ihre Frau anspruchsvoll ist, wissen Sie schon längst. Sie akzeptiert eben nur das Beste. Aber was sollen Sie tun?

Sie drehen den ersten Zettel um: 2,53. (Komische Zahl!) Dennoch, vielleicht sind alle anderen Zahlen kleiner. Wenn Sie diese wählen, ist Ihre Erfolgswahrscheinlichkeit 1/10, da Sie gemischt haben und damit alles gleich wahrscheinlich ist. Wenn die nächste Zahl größer ist, dann wird 2,53 uninteressant, ansonsten bleibt sie ein möglicher Gewinner. Eins ist klar: Wenn Sie weiter machen, haben Sie nur bei den Zahlen ein Entscheidungsproblem, die größer als alle vorherigen sind; mit einer kleineren können Sie nicht gewinnen. Ja! Eigentlich brauchen Sie sich nur die letzte bisher größte Zahl zu merken! Aber je mehr Zahlen Sie aufdecken, um so größer wird die Wahrscheinlichkeit, dass Sie die größte schon übergangen haben.

Ihre Frau lächelt Sie an. – Sie bitten um Bedenkzeit.

Wie wäre es mit folgender Strategie: Sie decken die ersten (sagen wir) fünf Zettel auf, merken sich die größte dieser Zahlen und wählen dann die nächste größere Zahl, wenn es eine gibt? Diese Strategie führt zumindest dann zum Erfolg, wenn die zweitgrößte aller Zahlen auf einem der ersten fünf Zettel und die größte auf einem der übrigen fünf Zettel steht. Denn die Wahrscheinlichkeit allein dafür ist bereits $(5\cdot5)/(10\cdot9) = 25/90$, eine erhebliche Verbesserung im Vergleich zu 1/10.

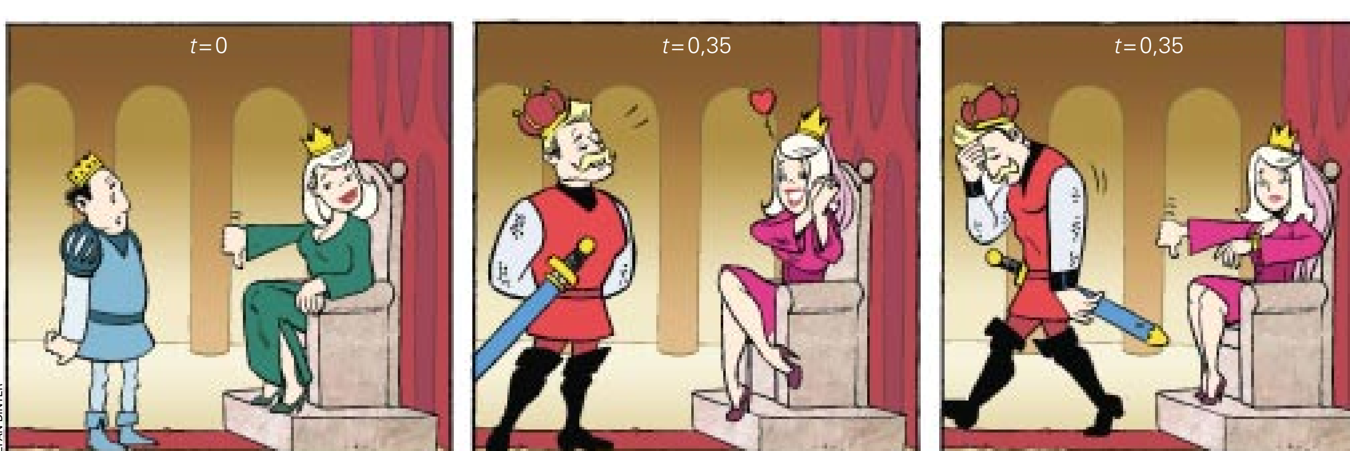
Die optimale Strategie hat tatsächlich diese Form: Man schaut eine gewisse Anzahl s von Zahlen an und wählt danach, wenn möglich, die nächste, die größer als die ersten s Zahlen ist. Der Beweis, dass die optimale Strategie diese Form hat, ist etwas anspruchsvoller. Die optimale Anzahl s hängt von der Gesamtanzahl n der Zettel ab und kann genau berechnet werden, ebenso die entsprechende Gewinnwahrscheinlichkeit. Das genaue Resultat ist kompliziert, aber es gibt eine einfache Faustregel:

- Die Gesamtanzahl der Angebote (Zettel) mit 0,367 multiplizieren und abrunden. Das Ergebnis ist eine gute Näherung an den optimalen Wert von s.
- Nach Beobachtung der ersten s Angebote das nächste Angebot wählen, das besser ist als das bisher beste. Wenn keins mehr kommt, hat man verloren.

Ihre Frau wartet und lächelt wieder. Ihre Kopfrechnung lautet $10\cdot0{,}367 = 3{,}67$; abgerundet ergibt dies 3. Also $s = 3$. Los geht's.

Sie lächeln zurück und drehen den zweiten Zettel um: $-3{,}1415$. (Frechheit, aber uninteressant.) Nun den dritten: 1000. (Aha!) Nicht beirren lassen; die Faustregel sagt »nach $s = 3$«. Von nun ab aber ist es optimal, bei der nächsten Gelegenheit zu wählen. Ihre Gewinnwahrscheinlichkeit ist rund 40 Prozent, genauer gesagt $3\cdot(1/9 + 1/8 + \ldots +1/3)/10 = 0{,}3987\ldots$. Ihr Risiko zu verlieren ist somit hoch. Aber dies liegt in der Natur des anspruchsvollen Ziels! Kein Analyst, kein Berater, niemand kann daran etwas ändern. Die Hypothesen stimmen, und die Mathematik ist auf Ihrer Seite. Ein bisschen Glück gehört immer dazu.

Wenn Sie gewinnen, belohnt Sie Ihre Frau am Sonntag mit Lammkoteletts, Pariser Böhnchen, einem guten Bordeaux und zum Dessert Omelette Norvégienne. Wenn nicht, stehen Sie selbst in der Küche, und Ihre Kochkünste – na ja. Also: Viel Glück!



STEFAN DINTER

Eine optimale Strategie hat etwas Bestechendes. Wer sie kennt, schlägt jeden, der sie nicht kennt – nicht jedesmal, aber »in Erwartung«, das heißt auf lange Sicht. Kaum jemand kennt sie, denn eine optimale Strategie zu finden ist nicht einfach, insbesondere im täglichen Leben. Aber die Idee, sich an optimalen Strategien für idealisierte, einfachere Situationen zu orientieren, sollte man in ihrer Wirksamkeit nicht unterschätzen.

Kann man die optimale Strategie für das Zettelspiel auf den Kauf oder Verkauf von Aktien, Immobilien oder Kunstgegenständen übertragen? Kann man sie benutzen, um den besten Kandidaten für eine gewisse Stelle oder sogar für den besten Ehepartner zu finden?

In der Literatur wird die Frage meistens als das »Sekretärinnenproblem« bezeichnet. *n* Anwärterinnen sprechen nacheinander für die Stelle einer Sekretärin vor, und der Chef kann jeder von ihnen auf der Stelle zusagen – oder auch nicht, in welchem Falle sie auf Nimmerwiedersehen verschwindet. Es gibt keine Rückrufmöglichkeit. Der Chef will nur die Beste! Mit der Zweitbesten ist er nicht zufriedener als mit der Unfähigsten.

Statt der Sekretärinnen stellt man sich auch gerne potenzielle Ehemänner vor. Die anspruchsvolle Frau – sagen wir die Prinzessin – kann sie zwar alle durchprobieren, aber nur einen nach dem anderen, und wen sie einmal weggeschickt hat, der kommt nicht wieder.

Ist die optimale Strategie auf solche Situationen übertragbar? Im Prinzip ja. Es ist jedoch Vorsicht geboten. Die Hypothesen, die der Strategie zu Grunde liegen, müssen ebenfalls übertragbar sein.

Es ist zum Beispiel durchaus vernünftig anzunehmen, dass ein Hausverkauf ungefähr so abläuft wie ein Zettelspiel: Die Angebote der potenziellen Käufer sind – innerhalb einer gewissen Bandbreite – unabhängig voneinander, und das eine Angebot sagt Ihnen so gut wie nichts über die Angebote, die noch kommen könnten. Anders beim Aktienkauf: Der Kurs von morgen ist keineswegs unabhängig von dem Kurs von heute. Und ob die Prinzessin wirklich nicht die geringste Vorstellung hat, ob da draußen nur noch Frösche oder auch Traumprinzen warten?

Im Wesentlichen wären viele Kauf- und Verkaufsprobleme, ja sogar Kandidaten- und Heiratsprobleme genauso zu lösen wie das genannte Zettelspiel, wenn … die Anzahl der Zettel im Voraus bekannt wäre. Im Allgemeinen weiß man aber nicht, wie viele potenzielle Käufer oder Traumprinzen vorsprechen werden.

Glücklicherweise kann das Modell durch einen Trick angepasst werden – und zwar erstaunlicherweise, ohne dass darunter die Erfolgswahrscheinlichkeit sehr leidet. Die Unkenntnis über die Anzahl beeinträchtigt uns also überraschend wenig: ein gutes Beispiel für die Überlegenheit mathematischer Modellierung über menschliche Intuition. Als ich das 1984 bewies, wurde dieses Resultat in einem Referat in den »Mathematical Reviews« als »Wunder« bezeichnet.

Das Modell selbst ist nicht schwierig und dürfte jeden Strategen interessieren. Hier ist es.

Das 1/*e*-Gesetz der besten Wahl

Nehmen wir an, Sie wollen in den nächsten sechs Monaten Ihr Haus verkaufen. Interessenten kommen, angelockt durch Anzeigen oder Immobilienmakler, geben ein Angebot ab und wollen auf der Stelle Ihre Antwort haben. Was sollten Sie tun?

Papier und Bleistift zur Hand, und nun einige kleine Fragen an Sie selbst: Was kann die Ankunftszeiten der möglichen Angebote beeinflussen? Für die nächsten drei Monate haben Sie für jeden ersten Samstag im Monat eine Anzeige in der Lokalzeitung aufgegeben. An diesen Samstagen oder kurz danach wird es mehr Anrufe geben als sonst. Mit der Zeit geht dieser Effekt zurück, weil diejenigen, die Ihre Anzeige schon kennen. nicht mehr anrufen. Zeichnen Sie Ihr Zeitintervall und wagen Sie sich an eine Kurve, welche die vermutete Wahrscheinlichkeit der Ankunftszeiten möglicher Angebote wiedergibt.

In sechs Wochen verreisen Sie und kommen erst zwei Wochen später wieder. Folglich in der entsprechenden Zeit die Kurve niedrig anlegen und nach der Rückkehr wieder ansteigen lassen. Wissen Sie sonst noch etwas? Halten Sie nur das Wesentliche in dieser Kurve fest, Details sind kaum wichtig.

Schauen Sie sich nun die Fläche zwischen Ihrer Kurve und Ihrem Zeitintervall an und schätzen Sie mit dem bloßen Auge oder mit einer Rasterfolie die ersten 36 Prozent der Fläche ab. (Die 36 Prozent sind eine Annäherung für $1/e$, dabei ist e die nach Euler benannte Zahl 2,718282…, die Basis der natürlichen Logarithmen.) Ein senkrechter Strich an dieser Stelle bestimmt einen Zeitpunkt x auf Ihrem Zeitintervall. Das ist Ihr Stichtag! Die Strategie lautet: Warten Sie bis zum Tag x und merken Sie sich das bisher beste Angebot. Und verkaufen Sie dem ersten Interessenten, der nach dem Tag x mehr bietet!

Wenn Sie dies tun, dann handeln Sie optimal, denn unter der Hypothese, dass man auf vorherige Angebote nicht zurückkommen kann, gibt es keine bessere Strategie! Wenn es Angebote gibt, haben Sie eine Erfolgswahrscheinlichkeit von mindestens $1/e$. Hier spielt dieser Wert ▷

Vom Traumprinzen zum 1/*e*-Gesetz

Ein Prinz nach dem anderen hält um die Hand der schönen Königstochter an. Die weiß schon, welchen unter allen, die sie bisher gesehen hat, sie bevorzugen würde. Aber sie muss sich jetzt entscheiden, ohne zu wissen, was noch kommt. Nur dem Besten will sie das Jawort geben. Wie soll sie das anstellen?

Nehmen wir an, die Anzahl der Kandidaten n sei bekannt. Die allgemeine Strategie ist, zunächst in einer »Erkundungsphase« s Kandidaten zu besichtigen und keinen von ihnen zu akzeptieren, aber dann den nächsten Besten zu nehmen, sprich den ersten, der besser ist als alle bisher besichtigten.

Nennen wir den besten aller Kandidaten überhaupt (den »Traumprinzen«) Charles. Unter welchen Umständen wird er erwählt? Erstens darf er nicht zu früh kommen, denn wenn er unter den ersten s ist, wird er automatisch verschmäht. Sagen wir, er kommt an j-ter Stelle, mit $j > s$. Zweitens kommt dann alles auf seinen bis dahin härtesten Konkurrenten an, genauer: auf den Besten unter allen, die vor Charles eintreffen. Nennen wir ihn Edward. Wohlgemerkt: Wer das ist, wissen wir erst, wenn die Reihenfolge der Kandidaten festliegt!

Edward ist eine tragische Figur: Ist er unter den ersten s Kandidaten, wird er zwar verschmäht, setzt aber die Maßstäbe so hoch, dass erst Charles die Prüfung wieder besteht. Das geschieht in s von $j-1$ Fällen. Kommt Edward später, wird er selbst oder ein Dritter erwählt, und der Traumprinz bleibt unbekannt.

Für Charles aber ist jede Position in der Reihenfolge der n Kandidaten gleich wahrscheinlich, also ist die Wahrscheinlichkeit P_n, dass er erwählt wird, gleich der Wahrscheinlichkeit $1/n$ dafür, dass er an j-ter Stelle kommt, mal der Wahrscheinlichkeit $s/(j-1)$ dafür, dass der jeweilige Edward sich für ihn opfert, summiert über alle j von $s+1$ bis n:

$$P_n = \frac{1}{n} \sum_{j=s+1}^{n} \frac{s}{j-1} = \frac{s}{n} \sum_{j=s}^{n-1} \frac{1}{j}$$

Dieser Ausdruck wird maximal, wenn man s so wählt, dass die Summe gerade noch größer als 1 oder gleich 1 ist. Für große n strebt das Verhältnis s/n gegen $1/e$.

Im kontinuierlichen Fall treffen *n* Kandidaten unabhängig voneinander zwischen den Zeiten 0 und 1 ein, ohne dass eine Ankunftszeit bevorzugt wäre. Die Prinzessin beendet ihre Erkundungsphase nicht nach s Kandidaten, sondern nach einer gewissen Zeit x. Welches ist der optimale Wert für x?

Diesmal bezeichnen wir mit Edward den besten unter den unglücklichen Kandidaten, die früh, das heißt bis zur Zeit x eintreffen. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau k Kandidaten besser sind als Edward (und damit definitionsgemäß spät, das heißt nach der Zeit x, eintreffen), ist gleich der Wahrscheinlichkeit x dafür, dass Edward früh kommt, mal der Wahrscheinlichkeit $(1-x)^k$ dafür, dass die k Besten spät kommen. Günstig ist nur der Fall, dass Charles als Erster unter diesen k eintrifft, was mit Wahrscheinlichkeit $1/k$ geschieht. Also ist die Wahrscheinlichkeit für den günstigen Ausgang der Geschichte

$$P_n(x) = x \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}(1-x)^k + \frac{1}{n}(1-x)^n \ .$$

(Der letzte Term bezieht sich auf den Fall, dass alle Kandidaten spät eintreffen.) Lässt man nun n gegen unendlich streben, so geht der letzte Term gegen 0 und die Summe gegen $-\log x$ (Taylorentwicklung). Also strebt die Erfolgswahrscheinlichkeit $P_n(x)$ gegen $-x \log x$; diese Funktion hat ihr Maximum bei $1/e$. Man kann zeigen, dass $P_n(x)$ für alle n größer ist als $-x \log x$. Das Traumpaar hat also für $x = 1/e$ in jedem Fall eine bessere Chance als $1/e$, sich zu finden, auch wenn n unbestimmt ist!

Wenn die Kandidaten nicht gleichverteilt über die Zeit, sondern zum Beispiel bevorzugt kurz nach Erscheinen der Annonce eintreffen, bleibt die obige Analyse gültig. Wir müssen uns nur eine Uhr denken, die durch unregelmäßigen Gang diese Ungleichmäßigkeiten genau kompensiert. Sie tickt also zunächst schneller und dann wieder langsamer, sodass die Wahrscheinlichkeit für einen Kandidaten, zwischen zwei aufeinander folgenden Ticks einzutreffen, stets dieselbe ist. Das Ende der Erkundungsphase ist dann, wenn diese Uhr die Zeit x anzeigt.

▷ also eine doppelte Rolle; daher der Name $1/e$-Gesetz. Sie haben sogar über 61 Prozent Wahrscheinlichkeit, einen der zwei besten Preise zu erzielen.

Wohlgemerkt: Diese Strategie gilt für Anspruchsvolle, die bereit sind, in Kauf zu nehmen, dass es in der geplanten Zeit nicht zum Verkauf kommt. Für andere Ziele sieht die optimale Strategie im Allgemeinen anders aus.

Und was tun, wenn es nun doch ein Angebot vor dem Stichtag gibt, das Ihnen so vorteilhaft erscheint, dass Sie auf jeden Fall annehmen möchten?

Tun Sie es. Selbst die besten Strategien werden zweitrangig, wenn Zusatzinformationen die Hypothesen, die ihnen zu Grunde liegen, verschieben. Zögern Sie also nicht, anzunehmen, wenn Sie das Glück haben, dass Ihnen die richtige Entscheidung offensichtlich erscheint. Meist ist die Entscheidung im täglichen Leben aber nicht so einfach, und dann verdient dieses Modell seine Beachtung.

Selbst professionelle Käufer/Verkäufer kennen dieses Modell kaum. Warum? Weil die Hypothesen in der Praxis meist nicht gelten? Vielleicht. Ein wichtiger Grund mag aber sein, dass es oft lange dauert, bis in mathematischen Zeitschriften publizierte Ergebnisse in vereinfachter Form zugänglich werden.

Wende ich die $1/e$-Methode selbst an? Im beruflichen Umfeld habe ich keine Gelegenheit hierzu. Privat schon einige Male. ◁

AUTOR UND LITERATURHINWEISE

F. Thomas Bruss ist Professor für Mathematik und Präsident des Mathematischen Departements der Freien Universität Brüssel (Université Libre de Bruxelles).

A note on bounds for the odds-theorem of optimal stopping. Von F. Thomas Bruss in: Annals of Probability, Bd. 31, S. 1859 (2003)

A unified approach to a class of best choice problems with an unknown number of options. Von F. Thomas Bruss in: Annals of Probability, Bd. 12, S. 882 (1984)

Dynamic programming and decision theory. Von D. V. Lindley in: Applied Statistics, Bd. 10, S. 35 (1961)

Weblinks zu diesem Thema finden Sie bei www.spektrum.de unter »Inhaltsverzeichnis«.