Universität Bremen
Fachbereich Mathematik

Stochastik
Sommersemester 2007

Lösungsskizzen zur 12. Übung

Aufgabe 3

a) Als Zufallsvariable definieren wir

$$X : \Omega \to \{26, 16, -4\}.$$

Es ist also $k_1 := 26$, $k_2 := 16$ und $k_3 := 0$. Wir haben

$$\begin{aligned} P(X = k_1) &= \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16} \\ P(X = k_2) &= \frac{4}{2^4} = \frac{1}{4} \\ P(X = k_3) &= \frac{11}{2^4} = \frac{11}{16} \end{aligned}$$

Hinweis: In den Übungen haben einige diese Wahrscheinlichkeiten mit dem üblichen Term zur Binomialverteilung gerechnet. Das ist in Ordnung. Es geht aber in diesem Fall auch anders. Wir können uns überlegen, dass es insgesamt 2^4 Möglichkeiten gibt, vier mal die Münze zu werfen. Bei jedem Wurf gibt es zwei Möglichkeiten. Die günstigen Möglichkeiten sind bei vier mal Zahl genau eine, nämlich (z, z, z, z). Also erhält man als Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2^4}$, die günstigen durch alle Möglichkeiten. Bei genau einmal Kopf gibt es vier günstige Möglichkeiten, da Kopf an erster, zweiter, dritter oder vierter Stelle stehen kann. Wir haben also eine Wahrscheinlichkeit von $\frac{4}{2^4}$. Für die dritte Wahrscheinlichkeit rechnen wir jetzt nur noch

$$1 - \left(\frac{1}{2^4} + \frac{4}{2^4}\right)$$

weil ja die Summe dieser Wahrscheinlichkeiten 1 ergeben muss. So kommen wir auf die $\frac{11}{2^4}$.

Der Erwartungswert $E(X)$, bzw. μ, ist nun

$$E(X) = \sum_{i=1}^{3} k_i \cdot P(X = k_i) = 26 \cdot \frac{1}{16} + 16 \cdot \frac{1}{4} + (-4) \cdot \frac{11}{16} = \frac{23}{8} = 2,875.$$

Die Varianz ist

$$Var(X) = \sum_{i=1}^{3} (k_i - \mu)^2 \cdot P(X = k_i) \approx 108,98$$

und die Streuung

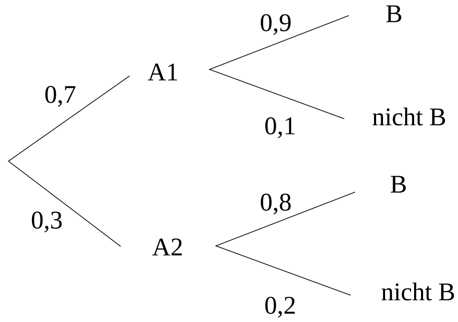
$$\sigma = \sqrt{Var(X)} \approx 10,44.$$

Aufgabe 4

a) Wir haben die folgenden Ereignisse:

A_1: Das Foto stammt von Labor 1.
A_2: Das Foto stammt von Labor 2.
B: Das Foto ist einbandfrei.
$\overline{B}$: Das Foto ist nicht einbandfrei.

Aus dem Aufgabentext ergibt sich dieses Diagramm:



Die Wahrscheinlichkeit $P(B)$ ist nun die „Summe der multiplizierten Wege", also

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B|A_1) + P(A_2) \cdot P(B|A_2) = 0,7 \cdot 0,9 + 0,3 \cdot 0,8 = 0,87.$$

Ein zufällig herausgegriffenen Foto ist also mit einer Wahrscheinlichkeit von 87% einbandfrei.

b) Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Foto aus Labor 1 kommt, wenn es einbandfrei ist, ist $P(A_1|B)$, also

$$P(A_1|B) = \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_1) \cdot P(B|A_1)}{P(B)} = \frac{0,7 \cdot 0,9}{0,87} = \frac{63}{87} \approx 0,72.$$

c) Da $P(B) = 0,87$ ist

$$P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0,87 = 0,13.$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Foto aus Labor 2 kommt, wenn es nicht einbandfrei ist, ist $P(A_2|\overline{B})$, also

$$P(A_2|\overline{B}) = \frac{P(A_2 \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{P(A_2) \cdot P(\overline{B}|A_2)}{P(\overline{B})} = \frac{0,3 \cdot 0,2}{0,13} = \frac{6}{13} \approx 0,46.$$

Aufgabe 5

Wie bei der Präsenzaufgabe lassen wir die 6 durch die verschiedenen Positionen wandern.

1. $6\,.\,|\,.\,.\,.\,.$: Es gibt 5! *ungünstige* Möglichkeiten, also 120. Die beste Kanditatin wird nie genommen.
2. $.\,6\,|\,.\,.\,.\,.$: Es gibt ebenfalls 5! *ungünstige* Möglichkeiten, also 120.
3. $.\,.\,|\,6\,.\,.\,.$: Es gibt 5! *günstige* Möglichkeiten, also 120. Es wird immer die beste Kandidatin mit der Bewertung 6 genommen.
4. $.\,.\,|\,.\,6\,.\,.$: Wir bezeichnen die drei Bewertungen vor der 6 nun mit B_1, B_2 und B_m. Dabei sei B_m größer als B_1 und B_2 (Zum Beispiel $B_m = 4, B_1 = 3, B_2 = 1$). Günstige Anordnungen sind diese 4 Möglichkeiten:

$$\begin{array}{cc|c} B_m & B_1 & B_2 \\ B_m & B_2 & B_1 \\ B_1 & B_m & B_2 \\ B_2 & B_m & B_1 \end{array}$$

   Ungünstige Anordnungen sind diese 2 Möglichkeiten:

$$\begin{array}{cc|c} B_1 & B_2 & B_m \\ B_2 & B_1 & B_m \end{array}$$

   Es gibt $\binom{5}{3}$ Möglichkeiten, diese drei Bewertungen aus den fünf übrigen zu ziehen. Außerdem kann man auf 2! die Bewertungen der letzten beiden Plätzen hinter der 6 anordnen. Wir bekommen damit:

$$\begin{aligned} &\textit{günstige}\text{ Möglichkeiten:} && 4 \cdot \binom{5}{3} \cdot 2! = 80. \\ &\textit{ungünstige}\text{ Möglichkeiten:} && 2 \cdot \binom{5}{3} \cdot 2! = 40. \end{aligned}$$

5. $.\,.\,|\,.\,.\,6\,.$: Wir bezeichnen jetzt die vier Bewertungen vor der 6 mit B_1, B_2, B_3 und B_m. Dabei sei B_m größer als B_1, B_2 und B_3. Wir können die vier Bewertungen auf $\binom{5}{4}$ Weisen auswählen. Günstige Anordnungen sind die, bei denen B_m an der ersten oder zweiten Stelle steht:

$$\begin{array}{cc|cc} B_m & B_1 & B_2 & B_3 \\ B_1 & B_m & B_2 & B_3 \end{array}$$

   Die Bewertungen B_1, B_2 und B_3 können wir auf jeweils 3! Weisen bei jeder Position von B_m anordnen. Es ergeben sich also als *günstige* Möglichkeiten:

$$2 \cdot 3! \cdot \binom{5}{4} = 2 \cdot 6 \cdot 5 = 60.$$

   Bei den *ungünstigen* Möglichkeiten steht B_m gerade auf den hinteren beiden Plätzen. Es ergeben sich also wieder 60 Möglichkeiten.

6. $..|...6$: Steht die 6 auf dem letzten Platz, so ist die größte Bewertung der übrigen die 5. Günstig sind die Möglichkeiten, wo die 5 auf einem der ersten beiden Plätzen steht:

$$\begin{array}{cc|cccc} 5 & . & . & . & . & 6 \\ . & 5 & . & . & . & 6 \end{array}$$

Wir bekommen damit $2 \cdot 4! = 48$ *günstige* Möglichkeiten. Ungünstig sind die Möglichkeiten, wo die 5 auf einem der hinteren drei Plätzen steht:

$$\begin{array}{cc|cccc} . & . & 5 & . & . & 6 \\ . & . & . & 5 & . & 6 \\ . & . & . & . & 5 & 6 \end{array}$$

Wir bekommen damit $3 \cdot 4! = 72$ *ungünstige* Möglichkeiten.

Insgesamt haben wir 412 ungünstige und 308 günstige Möglichkeiten von 720.

Wie interpretieren wir das nun? Zunächst erinnern wir uns daran, dass wir bei der Präsenzübung 1 insgesamt 274 günstige von den 720 Möglichkeiten hatten. Es ist also besser, zwei Prüfstellen (d.h. $s = 2$) zu haben als nur eine (d.h. $s = 1$). Laut Theorie ist die optimale Prüflänge $s = \frac{n}{e}$, wobei e die Eulerzahl ist ($e \approx 2,718$). In unserem Fall ist

$$s = \frac{n}{e} = \frac{6}{e} \approx 2,21.$$

Die Theorie ist also durch unser Beispiel bestätigt worden.