11. Übung

3a) Beim Ablesen der k_i tendiert man im Zweifel zu den kleineren Werten. Die W' werden so „hingeschoben", dass die Summe 1 ergibt.

k_i	7	18	31	41	52	59	69
$P(X=k_i)$	0,07	0,17	0,18	0,21	0,17	0,09	0,11

$$\sum_{i=1}^{7} P(X=k_i) = 0{,}07+0{,}17+0{,}18+0{,}21+0{,}17+0{,}09+0{,}11 = 1{,}00$$

$$E(X) = \sum_{i=1}^{7} k_i \cdot P(X=k_i) = 39{,}48$$

b) Ablesen der k_i eher zu den großen Werten.

k_i	8	18	32	41	53	59	69
$P(X=k_i)$	0,07	0,17	0,18	0,21	0,17	0,09	0,11

$$E(X) = \sum_{i=1}^{7} k_i \cdot P(X=k_i) = 39{,}90$$

Das Diagramm ist recht robust gegenüber Ableseungenauigkeiten.

4) a) $n=80,\ p=0{,}9$

Treffer: Buchung wird angenommen

$k :=$ Anzahl der Treffer

X: Einnahme, $E(X)$: erwartete Einnahmen

$\Rightarrow\ X = 500 \cdot k$ und

$$E(x) = \sum_{k=0}^{80} x\, P(x=k) = \sum_{k=0}^{80} 500 \cdot k \cdot P(x=k)$$

$$= 500 \underbrace{\sum_{k=0}^{80} k \cdot P(x=k)}_{= n \cdot p}$$

$$= 500 \cdot 80 \cdot 0{,}9 = 36\,000$$

Der Erwartungswert für die Annahmen beträgt 36 000€.

b) $n=85,\ p=0{,}9$

Treffer: Buchung wird angenommen

$k :=$ Anzahl der Treffer

$X :=$ Einnahme

$E(x) :=$ erwartete Einnahmen

$$\Rightarrow\ X = \begin{cases} 500 \cdot k & \text{für } k=0,1,\dots,80 \\ 80 \cdot 500 - (k-80) \cdot 200 & \text{für } k=81,82,\dots,85 \end{cases}$$

$$E(X) = \sum_{k=0}^{85} X(k)\, P(X=k)$$

$$= \sum_{k=0}^{85} 500 \cdot k \cdot P(X=k) - \sum_{k=81}^{85} (k-80) \cdot 500 \cdot P(X=k)$$

$$\underbrace{- \sum_{k=81}^{85} (k-80) \cdot 200 \cdot P(X=k)}_{\text{Strafzahlungen}}$$

$$= \underbrace{500 \cdot 85 \cdot 0{,}9}_{\text{nach a)}} - \sum_{k=81}^{85} (k-80) \cdot 700 \cdot P(X=k)$$

$$= 38250 - 700 \cdot \Big[1 \cdot \binom{85}{81} 0{,}9^{81} \cdot 0{,}1^{4} + 2 \cdot \binom{85}{82} \cdot 0{,}9^{82} \cdot 0{,}1^{3} + 3 \cdot \binom{85}{83} \cdot 0{,}9^{83} \cdot 0{,}1^{2} + 4 \cdot \binom{85}{84} \cdot 0{,}9^{84} \cdot 0{,}1 + 5 \cdot \binom{85}{85} 0{,}9^{85} \cdot 0{,}1^{0} \Big]$$

$$= 38250 - 700 \cdot (1 \cdot 0{,}0398 + 2 \cdot 0{,}0175 + 3 \cdot 0{,}0057 + 4 \cdot 0{,}0012 + 5 \cdot 0{,}0001)$$

$$= 38250 - 68{,}04 = 38113{,}92$$

Also, $38113{,}92 - 36000 = 2113{,}92$ € mehr als ohne Überbuchung.

5) a) Es geht um Würfeln

i) ohne Berücksichtigung der Reihenfolge (z.B. zwei weiße Würfeln)

ii) mit Berücksichtigung der Reihenfolge (z.B. ein rotes Würfel und ein grünes Würfel)

zu i) Der Ergebnisraum Ω umfasst folgende Ereignisse:

(1, 1)	(2, 2)	(3, 3)	(4, 4)	(5, 5)	(6, 6)
(2, 1)	(2, 3)	(3, 4)	(4, 5)	(5, 6)	
(3, 1)	(2, 4)	(3, 5)	(4, 6)		
(4, 1)	(2, 5)	(3, 6)			
(5, 1)	(2, 6)				
(6, 1)					

Also $|\Omega| = 21$

Das Ereignis A: "die Augensumme beträgt 11" sieht folgendermaßen aus:

$$(5,6) \Rightarrow |A| = 1$$

Nun

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{1}{21}$$

zu ii) Hier haben wir

$$|\Omega| = 36, \ |A| = 2 \ \big((5,6) \text{ und } (6,5)\big)$$

$$\Rightarrow \ P(A) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

b) $126 = \text{kgV}(18, 21)$

$$126 = 6 \cdot 21$$

und $126 = 7 \cdot 18$

Für $p = \frac{1}{21}$ und $n = 126$ [illegible]

c) Annahme: man muss insgesamt n Versuche machen.

1) $p = \frac{1}{21}$, n Versuche, $q = 1 - p = \frac{20}{21}$

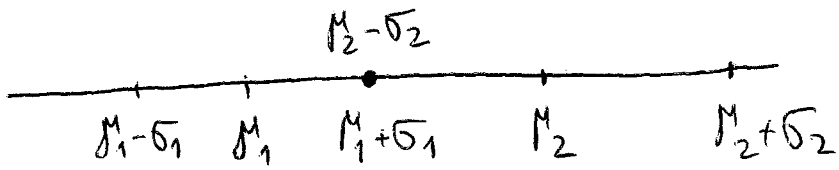
$\Rightarrow \mu_1 = n \cdot \frac{1}{21}$ und $\sigma_1 = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{n \cdot \frac{1}{21} \cdot \frac{20}{21}}$

Also $\mu_1 = \frac{n}{21}$ und $\sigma_1 = \frac{2}{21}\sqrt{5n}$

2) $p = \frac{1}{18}$, $q = \frac{17}{18}$ und n Versuche

$\Rightarrow \mu_2 = \frac{n}{18}$ $\quad \sigma_2 = \sqrt{n \cdot \frac{1}{18} \cdot \frac{17}{18}} = \frac{1}{18}\sqrt{17n}$

Ansatz: $\mu_1 + \sigma_1 = \mu_2 - \sigma_2$



(weil $\mu_2 > \mu_1$)

$\Rightarrow \frac{n}{21} + \frac{2}{21}\sqrt{5n} = \frac{n}{18} - \frac{1}{18}\sqrt{17n} \quad | \cdot 126$

$6n + 12\sqrt{5n} = 7n - 7\sqrt{17n}$

$(12\sqrt{5} + 7\sqrt{17})\sqrt{n} = n \quad |$ quadr.

$(12\sqrt{5} + 7\sqrt{17})^2 \cdot n = n^2 \quad | \, n \neq 0$

$n \approx 3102 \Rightarrow$ Man muss gut 3000 Versuche machen, um die geforderte Trennung zu erreichen!