Universität Bremen
Fachbereich Mathematik

Stochastik
Sommersemester 2007

Lösungsskizzen zur 8. Übung

Aufgabe 2

a) Wenn eine 1 gezogen wird, so ist danach die Wahrscheinlichkeit $\frac{4}{4}$, dass die nachfolgende Zahl größer ist. Wird eine 2 gezogen, so ist die Wahrscheinlichkeit $\frac{3}{4}$, bei einer 3 ist sie $\frac{2}{4}$, bei einer 4 ist sie $\frac{1}{4}$ und bei einer 5 ist sie 0. Daher ergibt sich folgende Gesamtwahrscheinlichkeit dafür, dass die zweite Kugel einen höheren Wert als die erste hat:

$$\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{4}+\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{4}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\cdot 0=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot(1+2+3+4)=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot 10=\frac{1}{2}.$$

c) Allgemein bei n Kugeln ($n \in \mathbb{N}$ und $n > 0$) haben wir mit den selben Überlegungen wie oben eine Wahrscheinlichkeit von

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{n}\cdot\left(\tfrac{n-1}{n-1}+\tfrac{n-2}{n-1}+\tfrac{n-3}{n-1}+\cdots+\tfrac{1}{n-1}\right) &= \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n-1}\cdot\sum_{k=1}^{n-1}k\\
&= \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n-1}\cdot\frac{(n-1)\cdot n}{2}\\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Bei n Kugel ist also die Wahrscheinlichkeit genau $\frac{1}{2}$, dass die zweite Kugel einen höheren Wert als die erste hat.

Aufgabe 3

b) Für $P(D)$ ergibt sich folgende Wahrscheinlichkeit durch Aufsummieren der Wege im ersten Diagramm:

$$\begin{aligned}
P(D) &= P(A)\cdot P(D|A)+P(B)\cdot P(D|B)+P(C)\cdot P(D|C)\\
&= P(A\cap D)+P(B\cap D)+P(C\cap D).
\end{aligned}$$

d) Wegen des Multiplizieren innerhalb eines Weges in den Bäumen, haben wir

$$\begin{aligned}
P(A\cap D) &= P(D)\cdot P(A|D) \text{ und}\\
P(A\cap D) &= P(A)\cdot P(D|A).
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich mit den Ergebnissen von b):

$$P(A|D)=\frac{P(A\cap D)}{P(D)}=\frac{P(A)\cdot P(D|A)}{P(D)}=\frac{P(A)\cdot P(D|A)}{P(A)\cdot P(D|A)+P(B)\cdot P(D|B)+P(C)\cdot P(D|C)}.$$

Aufgabe 4 Wir bezeichnen folgende Ereignisse:

A	Die Scheibenwischer sind von der 1. Firma.
B	Die Scheibenwischer sind von der 2. Firma.
C	Die Scheibenwischer sind von der 3. Firma.
D	Die Scheibenwischer müssen ersetzt werden.

Dann ergeben mit Aufgabe 3 d) folgende Wahrscheinlichkeiten dafür , dass, wenn die Scheibenwischer ersetzt werden müssen, die Scheibenwischer von der 1., der 2., bzw. der 3. Firma sind:

$$\begin{aligned} P(A|D) &= \frac{P(A)\cdot P(D|A)}{P(A)\cdot P(D|A)+P(B)\cdot P(D|B)+P(C)\cdot P(D|C)} \\ &= \frac{0,5\cdot 0,2}{0,5\cdot 0,2+0,3\cdot 0,25+0,2\cdot 0,15} \\ &= \frac{20}{41}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(B|D) &= \frac{P(B)\cdot P(D|B)}{P(A)\cdot P(D|A)+P(B)\cdot P(D|B)+P(C)\cdot P(D|C)} \\ &= \frac{0,3\cdot 0,25}{0,5\cdot 0,2+0,3\cdot 0,25+0,2\cdot 0,15} \\ &= \frac{15}{41}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(C|D) &= \frac{P(C)\cdot P(D|C)}{P(A)\cdot P(D|A)+P(B)\cdot P(D|B)+P(C)\cdot P(D|C)} \\ &= \frac{0,2\cdot 0,15}{0,5\cdot 0,2+0,3\cdot 0,25+0,2\cdot 0,15} \\ &= \frac{6}{41}. \end{aligned}$$

Tipp: Dass etwas Sinnvolles herauskommt, kann man auch dadurch überprüfen, dass die Wahscheinlichlichkeiten addiert 1 ergeben, was sie müssen, also: $\frac{20}{41}+\frac{15}{41}+\frac{6}{41}=\frac{41}{41}=1$.

Aufgabe 5

Wir überlegen uns zunächst, was die Wahrscheinlichkeit davon ist, dass der Kandidat genau n Fragen richtig ankreuzt, wobei $0 \le n \le 12$. Wir bezeichnen dieses Ereignis mit A_n.

Wenn er genau n mal richtig anwortet, dann antwortet er $(12-n)$ mal falsch. Die Wahrscheinlichkeit zufällig richtig zu tippen ist $\frac{1}{3}$ und die Wahrscheinlichkeit zufällig falsch zu tippen $\frac{2}{3}$. Außerdem gibt es genau

$$\binom{12}{n}$$

Möglichkeiten, von 12 Fragen n richtig zu beantworten. Daher ergibt sich für die Wahrscheinlichkeit:

$$P(A_n) = \binom{12}{n} \cdot \left(\tfrac{1}{3}\right)^n \cdot \left(\tfrac{2}{3}\right)^{12-n}.$$

Für den Fall „genau drei Richtige“ ergibt sich so zum Beispiel die Wahrscheinlichkeit

$$P(A_3) = \binom{12}{3} \cdot \left(\tfrac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\tfrac{2}{3}\right)^9 \approx 0,21195.$$

Wir beginnen nun bei A_{12}, also 12 richtigen Antworten, und summieren die Wahrscheinlichkeiten so lange auf, bis sich eine Wahrscheinlichkeit größer als 25% ergibt:

$$\begin{aligned}
P(A_{12}) &\approx 0,00000118\\
P(A_{11}) &\approx 0,00004516\\
P(A_{10}) &\approx 0,000497\\
P(A_9) &\approx 0,003311\\
P(A_8) &\approx 0,0149\\
P(A_7) &\approx 0,047689\\
P(A_6) &\approx 0,11127\\
P(A_5) &\approx 0,19076
\end{aligned}$$

Wir können ausrechnen, dass

$$\sum_{i=6}^{12} P(A_i) \approx 0,1778$$

und

$$\sum_{i=5}^{12} P(A_i) \approx 0,368.$$

Die Wahrscheinlichkeit „mindestens 6 richtige Anworten zu haben“ ist also etwa 17,78% und die Wahrscheinlichkeit „mindestens 5 richtige Anworten zu haben“ etwa 36,8%.

Da die Wahrscheinlichkeit zum Bestehen unter 25% sein soll, müssen wir daher mindestens 6 richtige Antworten fordern.