7. Übung

4) a) Sei n die W' für das Elementarereignis $\{1\}$.

Dann:

$2 \cdot n$ ist die W' für das Elementarereignis $\{2\}$

$3 \cdot n$ — " — $\{3\}$

. . . .

$10n$ — " — $\{10\}$

Also

$$n + 2n + 3n + \dots + 10n = 1$$

$$n(1+2+3+\dots+10) = 1$$

$$n \cdot 55 = 1$$

$$n = \frac{1}{55}$$

$\Rightarrow$ Die W' für das Elementarereignis $\{1\}$ beträgt $\frac{1}{55}$.

b) Bezeichnungen wie oben.

Dann für N mögliche Ergebnisse erhalten wir

$$n + 2n + 3n + \dots + N \cdot n = 1$$

$$n(1+2+\dots+N) = 1$$

Aber

$$1+2+\dots+N = \frac{N(N+1)}{2}$$

(Beweis durch Vollständige Induktion)

$$\Rightarrow \quad n \cdot \frac{N(N+1)}{2} = 1$$

$$n = \frac{2}{N(N+1)}$$

$\Rightarrow$ Die W' für das Elementarereignis $\{1\}$ für N mögliche Ergebnisse beträgt

$$\frac{2}{N(N+1)}.$$

5) Interessierende Ereignisse:

E: Mensch ist Einheimischer

$\bar{E}$: Mensch ist Tourist

H: Mensch trägt Tirolerhut

$\bar{H}$: Mensch trägt kein Tirolerhut.

gegebene Wahrscheinlichkeiten:

$P(E) = \frac{1}{6}$, $P(\bar{E}) = \frac{5}{6}$

$P(H|E) = \frac{1}{5}$, $P(H|\bar{E}) = \frac{3}{5}$

a) gesuchte Wahrscheinlichkeit: $P(E|H)$

Formel von Bayes:

$$P(E|H) = \frac{P(H|E) \cdot P(E)}{P(E) \cdot P(H|E) + P(\bar{E}) P(H|\bar{E})}$$

$$\Rightarrow P(E|H) = \frac{\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6}}{\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{5}}$$

$$= \frac{\frac{1}{30}}{\frac{16}{30}} = \frac{1}{16} \Rightarrow P(E|H) = \frac{1}{16}$$

b) gesuchte Wahrscheinlichkeit: $P(E \mid \bar{H})$

Formel von Bayes:

$$P(E \mid \bar{H}) = \frac{P(\bar{H} \mid E) \cdot P(E)}{P(\bar{H} \mid E) \cdot P(E) + P(\bar{E}) \cdot P(\bar{H} \mid \bar{E})}$$

gegebene Wahrscheinlichkeiten:

$$P(\bar{H} \mid E) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

$$P(\bar{H} \mid \bar{E}) = \frac{2}{5}$$

$$\Rightarrow P(E \mid \bar{H}) = \frac{\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{6}}{\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{2}{5}}$$

$$= \frac{\frac{4}{30}}{\frac{14}{30}} = \frac{2}{7}$$

$$\Rightarrow P(E \mid \bar{H}) = \frac{2}{7}$$

$P(E \mid \bar{H}) > P(E \mid H) \Rightarrow$ es ist günstiger Personen ohne Tirolerhut nach Auskunft zu fragen.

6) 100 Einheimische $\Rightarrow$ 500 Touristen

Lösung mit Hilfe der Vierfeldertafel:

	H	$\overline{H}$	
E	20	80	100
$\overline{E}$	300	200	500
	320	280	600

$\frac{20}{320}$ $\frac{80}{280}$

Der Anteil von Einheimischen, die einen Hut tragen beträgt $\frac{20}{320} = \frac{1}{16}$.

Der Anteil von nicht-Huttragenden Einheimischen beträgt $\frac{80}{280} = \frac{2}{7}$.

Die Chance eine richtige Auskunft zu erhalten ist also größer, wenn man Personen ohne Hut nach dem Weg fragt.

7. $$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \quad (\text{gegeben}) \ \ldots \ (1)$$

a) z.z. $P(A\cap B|B) = P(A|B)$

$$\underline{P(A\cap B|B)} \overset{(1)}{=} \frac{P((A\cap B)\cap B)}{P(B)} = (\text{weil } A\cap B\cap B = A\cap B)$$

$$= \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{P(B\cap A)}{P(B)} \overset{(1)}{=} \underline{P(A|B)}$$

b) $$P(A|A) \overset{(1)}{=} \frac{P(A\cap A)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$$

$$P(A|\bar{A}) = \frac{P(A\cap\bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{P(\phi)}{P(\bar{A})} = 0$$

$$P(A|\Omega) = \frac{P(A\cap\Omega)}{P(\Omega)} = \frac{P(A)}{1} = P(A)$$

c) $P(A\cap B|B)$ – W' für $A\cap B$, wenn B eingetreten ist, also gleich $P(A|B)$

$P(A|A)$ – W' für A, wenn A eingetreten ist, also 100%.

$P(A|\bar{A})$ – W' von A, wenn das Gegenereignis $\bar{A}$ eingetreten ist, also 0%.

$P(A|\Omega)$ – W' von A, wenn alle Ereignise eingetreten sind, also gleich $P(A)$.