Universität Bremen
Fachbereich Mathematik

Lösungen zur 3. Übung

Aufgabe 3

a) Es handelt sich um eine Laplace-Wahrscheinlichkeit, da wir davon ausgehen können, dass jedes Ergebnis der jeweiligen Ergebnismenge mit der gleiche Wahrscheinlichkeit auftritt, wie z.B. bei der Münze je $\frac{1}{2}$ für Kopf und Zahl.

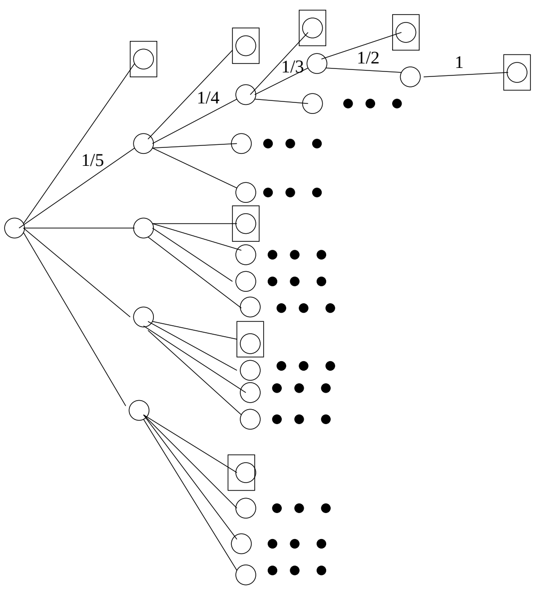
Bei b) kann man sich streiten.

Bei c), d) und e) handelt es sich nicht um eine Laplace-Wahrscheinlichkeit. Dies kann man sich leicht überlegen, in dem man für die jeweiligen Ereignisse die Anzahl der für das Ereignis günstigen Ergebnisse ins Verhältnis zur Anzahl der möglichen Ergebnisse setzt.

Aufgabe 4

a) Wir gehen davon aus, dass sich die Schlüssel sehr ähnlich sehen. Dann ist die Wahrscheinlichkeit, beim ersten Test den richtigen Schlüssel zu erwischen, genau $\frac{1}{5}$.

b) Stellen wir uns einen Baum vor, der alle Möglichkeiten aufzeigt, je nachdem, welcher Schlüssel genommen wurde. Das folgende Bild zeigt nur einen Teil dieses Baumes. Mit einem Kästchen ist jeweils die Wahl des richtigen Schlüssels gekennzeichnet. Die drei Punkte deuten jeweils an, dass hier der Baum noch weitergeht.



Wir sehen einen eingezeichneten Pfad, bei dem erst vier Mal ein falscher Schlüssel gewählt wurde und am Ende der richtige. Die Wahrscheinlichkeit genau diesen Pfad beim Ausprobieren zu erwischen ist:

$$\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1.$$

Es gibt 4! Möglichkeiten am Anfang die vier falschen Schlüssel zu wählen. Wir nennen nun das Ereignis, bei dem beim letzten Test der richtige Schlüssel erwischt wird, A. Dann ist (weil man kürzen kann):

$$\begin{aligned} P(A) &= 4! \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \\ &= 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \\ &= \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

c) Im allgemeinen Fall von n Schlüsseln ist die Wahrscheinlichkeit, einen bestimmten Pfad zu wählen, bei dem man erst am Ende den richtigen Schlüssel hat:

$$\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{n-2} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1.$$

Dies ist dasselbe wie

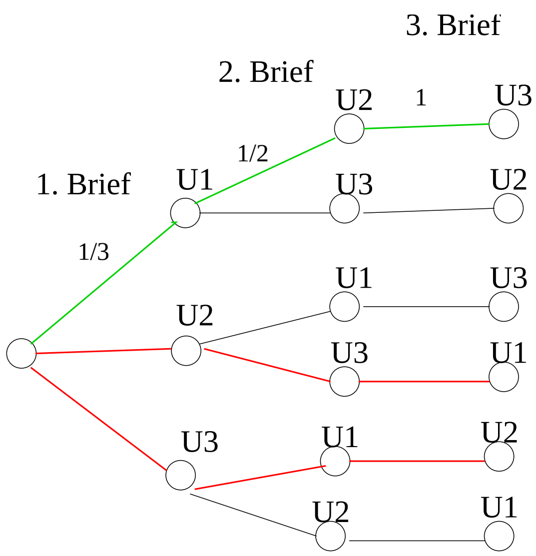
$$\frac{1}{n!}$$

Es gibt nun $(n-1)!$ viele Möglichkeiten die ersten $n-1$ Schlüssel anzuordnen. Also ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit (wie bei b durch Kürzen)

$$P(A) = (n-1)! \cdot \frac{1}{n!} = \frac{1}{n}$$

Aufgabe 5

Sehen wir uns zunächst den Entscheidungsbaum an:



Die Bezeichnung U1, U2, U3 bedeuted, dass der Brief in Umschlag 1, Umschlag 2 oder Umschlag 3 gesteckt wurde.

a) Beim grünen Pfad wurde jeder Brief in den richtigen Umschlag gesteckt. Die Wahrscheinlichkeit dafür ist $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1$, also $\frac{1}{6}$.

b) Bei den beiden roten Pfaden wurden alle drei Brief in falsche Umschläge gesteckt. Die Wahrscheinlichkeit dafür ist

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1,$$

also $\frac{1}{3}$.

Aufgabe 6

Wir nennen das Ereignis, das Jan Tutnix besteht, A und das Ereignis, das Klara Fleißig besteht, B.

a) Jan hat sich nur auf eine Frage vorbereitet. Die Wahrscheinlichkeit, bei der ersten Frage diese zu erwischen, ist $\frac{1}{8}$. Die Wahrscheinlichkeit, diese Frage beim zweiten Mal zu erwischen ist $\frac{7}{8} \cdot \frac{1}{7}$. Also ist

$$P(A) = \frac{1}{8} + \frac{7}{8} \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{4}.$$

Um diese Rechnung zu verstehen, kann man sich wie zuvor einen Entscheidungsbaum aufzeichnen.

a) Klara hat sich auf sechs Fragen vorbereitet. Die Wahrscheinlichkeit, bei der ersten Frage eine davon erwischt wird, ist $\frac{6}{8}$. Die Wahrscheinlichkeit, die erste nicht beantworten zu können, dafür aber die zweite Frage, ist $\frac{2}{8} \cdot \frac{6}{7}$. Also ist

$$P(B) = \frac{6}{8} + \frac{2}{8} \cdot \frac{6}{7} = \frac{27}{28}.$$

c) Wenn Jana sich auf n Fragen vorbereitet, wobei $n \in \{0, 1, 2, \ldots, 8\}$, dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie die Prüfung besteht

$$\frac{n}{8} + \frac{8-n}{8} \cdot \frac{n}{7}.$$

Die Begründung ist die gleiche wie bei a) und b). Jana möchte nun, dass diese Wahrscheinlichkeit mindestens 50% ist, also dass

$$\frac{n}{8} + \frac{8-n}{8} \cdot \frac{n}{7} \geq \frac{1}{2}.$$

Durch entweder Einsetzen oder Umformen und Ausrechnen sieht man, dass n genau 3 sein muss, damit die Wahrscheinlichkeit so eben über 50% liegt. Bei $n = 2$ ist die Ungleichung nicht erfüllt.