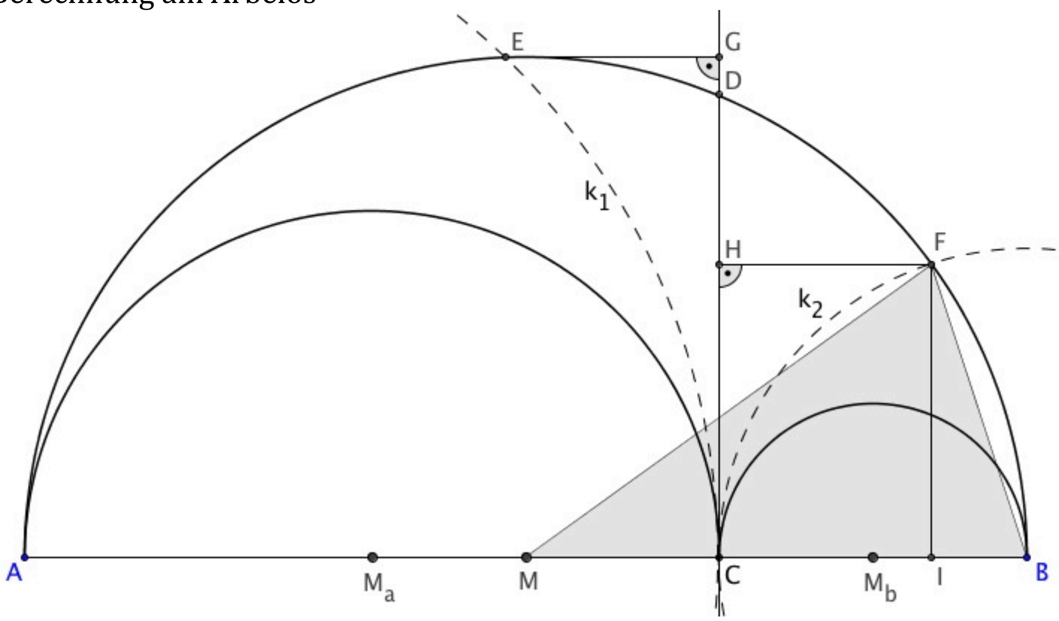
10. Übung
Arbelos, Inkreis

Präsenzübungen für Do, 25.6.

1. Berechnung am Arbelos



In einen Arbelos zeichnet man um A mit dem Radius $|AC|$ den Kreis k_1 und um B mit dem Radius $|BC|$ den Kreis k_2. Die Schnittpunkte mit dem „Außenkreis" sind E und F. CD ist wie üblich die Senkrechte zur Basislinie durch C. Von E und F fällt man das Lot auf CD, die Fußpunkte sind G und H.

a. Berechnen Sie die Länge des Lots $\overline{HF}$.

Anleitung: Nennen Sie die gesuchte Länge s und die Länge des Lots von F auf die Basislinie h (Fußpunkt I). Schreiben Sie dann den Satz des Pythagoras auf für die beiden rechtwinkligen Dreiecke MIF und IBF.

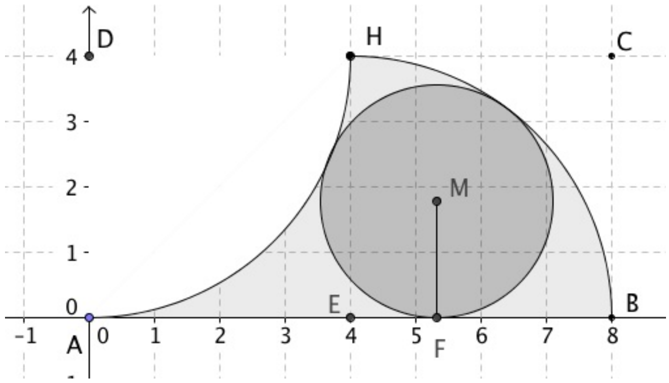
Ergebnis: $|HF| = s = \dfrac{2ab}{a+b}$

b. Warum ist der Ansatz $|MI| \cdot |IB| = |IF|^2$ (nach dem Höhensatz) falsch?

c. Argumentieren Sie, dass $|EG| = |HF|$ gilt.

Hausübungen (Abgabe: Mi, 1.7.)

2. Inkreisberechnung



Folgende Kreisbogenfigur wird konstruiert: Zu den Punkten A(0;0), B(8;0), C(8;4) und D(0;4) werden um D der Viertelkreisbogen mit dem Radius 4 von A aus gezeichnet. E ist der Mittelpunkt von $\overline{AB}$ und H der Mittelpunkt von $\overline{DC}$. Um E wird der Viertelkreisbogen mit dem Radius 4 von B aus gezeichnet. Beide Viertelkreisbögen treffen sich in H. Weiterhin ist die Strecke $\overline{AB}$ eine Begrenzung.
In dieser Kreisbogenfigur (hellgrau) soll der Inkreis konstruiert werden. Dazu wird (wie im Arbelos) mit der angenommenen, fertigen Lösung ein Ansatz gemacht mit den Koordinaten des Mittelpunkts M(s;h) des Inkreises und dem Radius r. In der Abbildung ist also $|\mathrm{AF}| = s$ und $|\mathrm{MF}| = h$.

Arbeiten Sie auf dem Arbeitsblatt.

a. Mit welcher Argumentation kann man auf die Unbekannte h verzichten und allein mit r und s arbeiten?

b. Machen Sie mit dem dargestellten 1. Hilfkreis (gestrichelt dargestellt, Schnittpunkte mit der x-Achse sind K und L) einen Ansatz für die Unbekannten r und s mit dem Höhensatz.

c. Machen mit dem dargestellten 2. Hilfkreis (gestrichelt dargestellt, Schnittpunkte mit der y-Achse sind N und P) einen Ansatz für die Unbekannten r und s mit dem Höhensatz.

d. Kombinieren Sie nun beide Gleichungen aus den beiden Ansätzen so, dass s und r berechnet werden kann.

3. Termumformung

Die Rechnung zur Berechnung des Inkreisradius im Arbelos. Es beginnt mit zwei Gleichungen

$2ar = 2bs + 4ab - 2br - 2ar$ und $2ar - 2as = 2br + 2bs$ (1)

$4ar + 2br - 4ab = 2bs$ und $2ar - 2br = 2as + 2bs$ (2)

$2ar + br - 2ab = bs$ und $(a-b)r = (a+b)s$ (3)

$(2ar + br - 2ab)(a+b) = b(a+b)s$ und $b(a-b)r = b(a+b)s$ (4)

Nun werden die Gleichungen kombiniert.

$$(2ar + br - 2ab)(a+b) = b(a-b)r \quad (5)$$

$$2a^2r + abr - 2a^2b + 2abr + b^2r - 2ab^2 = abr - b^2r \quad (6)$$

$$2a^2r + 2abr + 2b^2r = 2a^2b + 2ab^2 \quad (7)$$

$$r(a^2 + ab + b^2) = ab(a+b) \quad (8)$$

$$r = \frac{ab(a+b)}{a^2 + ab + b^2} \quad (9)$$

Erläutern Sie die Schritte der Termumformung.

4. Zeichenaufgabe
   Führen Sie auf dem Arbeitsblatt die dort aufgeführte Konstruktionsbeschreibung aus. Es ist die Konstruktion des Inkreises des Arbelos nach Leon Bankoff.
   Senkrechte und Mittelpunkte zeichnen Sie bitte (zeitsparend und übersichtlich) mit dem Geodreieck.
   Sie können die Konstruktion auch mit GeoGebra machen. Fügen Sie dann einen Ausdruck Ihrer Hausübung bei.

5. Aufgabe zum räumlichen Vorstellungsvermögen
   Versuchen Sie, diese Aufgabe nach Möglichkeit nur in Ihrer Vorstellung zu lösen. Wenn das nicht geht oder Sie unsicher sind, bleibt immer noch die Möglichkeit, es auszuprobieren.
   Das rechte Bild ist die Kombination der farbigen Fläche vor und im Spiegel. Wo muss im linken Bild der Spiegel stehen (Strich einzeichnen) und von welcher Seite muss man in den Spiegel schauen (Pfeil einzeichnen)?
   Halten Sie Ausschau nach mehreren Lösungen.

   a.

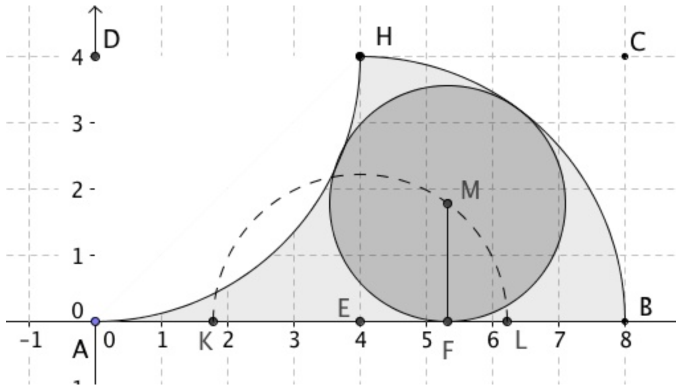
   b.

Arbeitsblatt zur Aufgabe 2

a. Warum ist die Unbekannte h überflüssig?

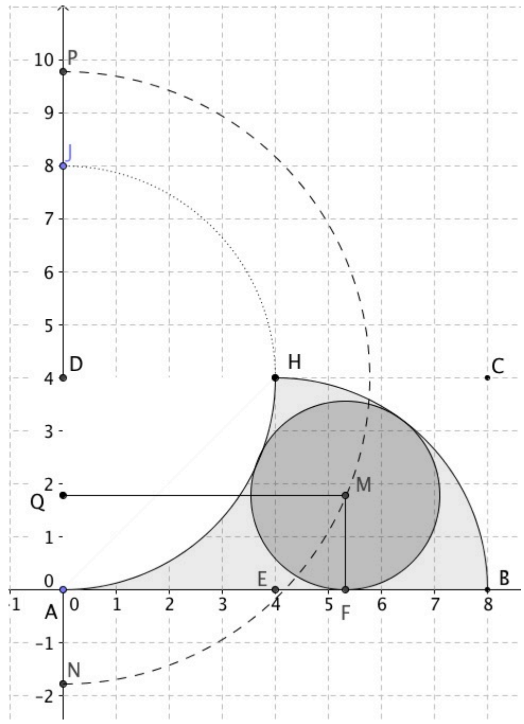
b. Überlegen Sie:

- Mit welchem rechtwinkligen Dreieck können Sie arbeiten?
- Wie lautet in dem Dreieck der Höhensatz?
- Wie lang sind die Strecken, ausgedrückt in *r*, *s* und bekannten Längen?

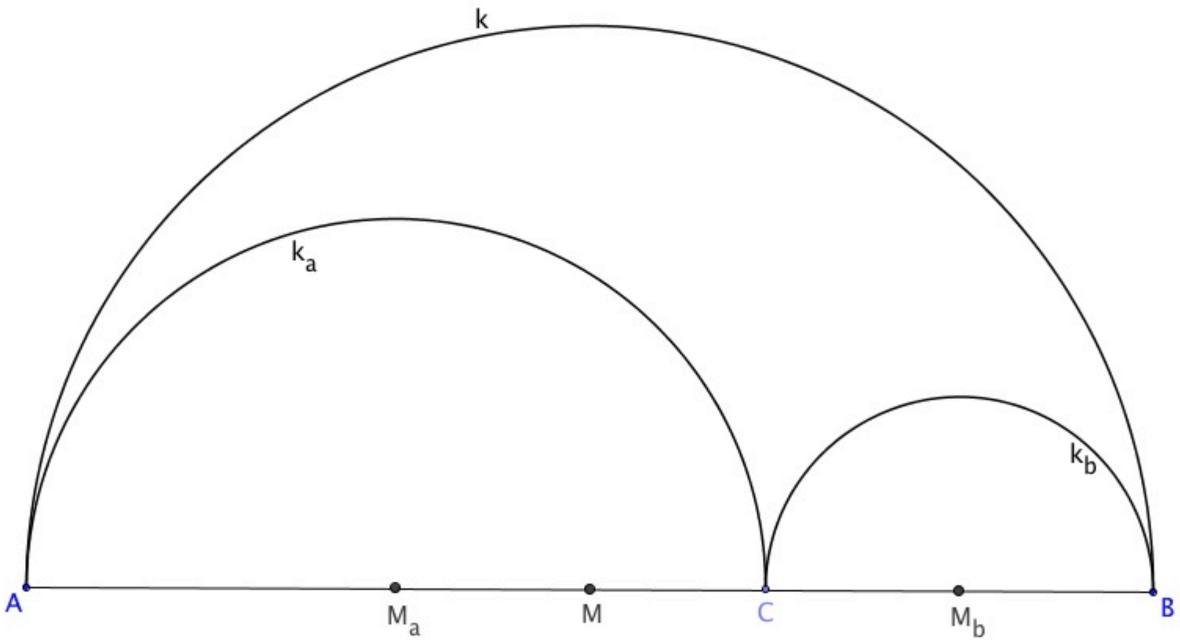


c. Erweiterung der Zeichung:
Der Viertelkreisbogen um D wird weitergeführt bis zum Schnittpunkt J(0;8) mit der y-Achse.
Überlegen Sie:

- Mit welchem rechtwinkligen Dreieck können Sie arbeiten?
- Wie lautet in dem Dreieck der Höhensatz?
- Wie lang sind die Strecken, ausgedrückt in *r*, *s* und bekannten Längen?



Arbeitsblatt zur Aufgabe 4



1. Zeichne über der Strecke $\overline{CB}$ das Quadrat (nach oben). Der Punkt über B heißt Z', der über C heißt X'.
2. Zeichne den Mittelpunkt Y' des Quadrats CBZ'X'. (Er liegt auf k_b.)
3. Verlängere die Strecke $\overline{AX'}$ über X', so dass man einen Schnittpunkt X mit dem Halbkreis k erhält.
4. Die Strecke $\overline{AZ'}$ schneidet den Halbkreis k_a in Z.
5. Die Strecke $\overline{AY'}$ schneidet den Halbkreis k_b (ein zweites Mal) in Y.

Die so konstruierten Punkte X, Y und Z sind die Berührpunkte des gesuchten Inkreises mit den Begrenzungshalbkreisen des Arbelos. Um den Kreis selbst konstruieren zu können brauchen wir noch den Mittelpunkt. Den erhält man durch folgende zwei Linien.

6. Verlängere die Strecke $\overline{M_bY}$ über Y.
7. Verlängere die Strecke $\overline{M_aZ}$ über Z.
8. Der Schnittpunkt der beiden Linien aus 7. und 8. ist der Mittelpunkt M_i des Inkreises.
9. Zeichne den Inkreis als Kreis um M_i mit dem Radius $|M_iZ|$.