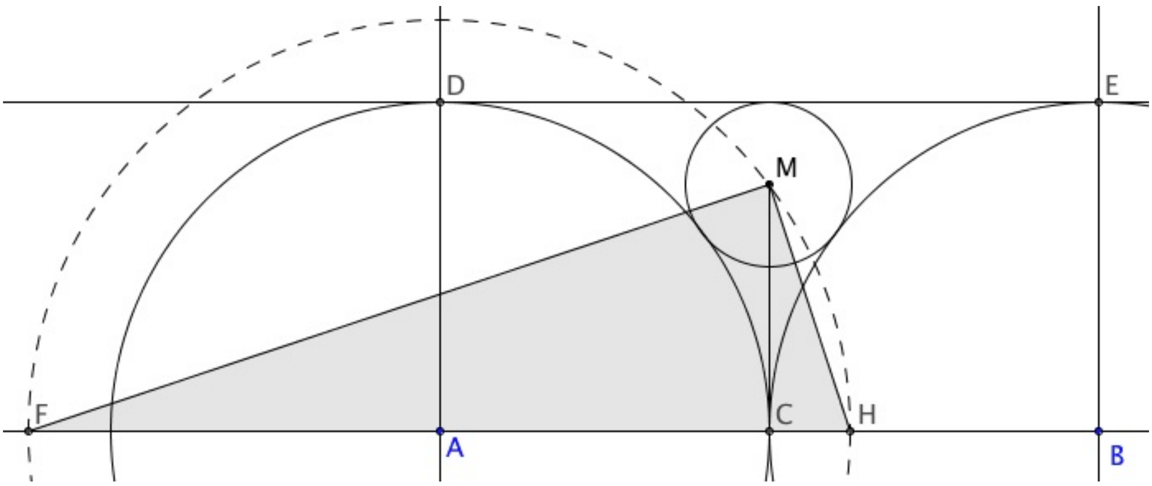
9. Übung
Arbelos, Höhensatz, Inkreise

Präsenzübungen für Do, 18.6.

1. Berechnung eines Inkreises

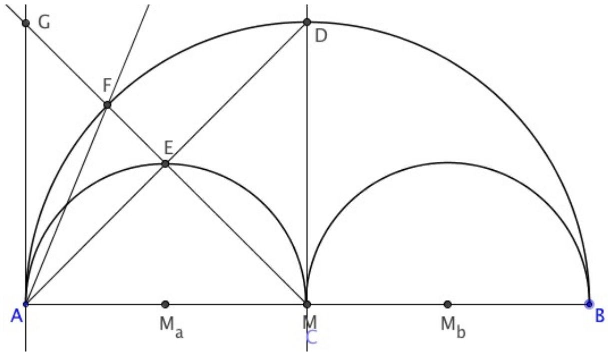


Gegeben ist die Strecke $\overline{AB}$ und ihr Mittelpunkt C. Um A wird ein Kreis geschlagen mit $|AC| = R$ und um B ein Kreis, ebenfalls mit dem Radius R. In A und B werden die Senkrechten zur Geraden AB gezeichnet, die Schnittpunkte mit den Kreisen auf einer Seite der Geraden AB sind D und E (siehe Zeichnung). Gesucht ist nun der Kreis, der die beiden Kreise und die Gerade DE berührt.
(Für einen Ansatz mit dem Höhensatz wurde ein Hilfskreis (gestrichelt) gezeichnet, der die Gerade AB in F und H schneidet.)

a. Drücken Sie die folgenden Streckenlängen durch den Radius R (gilt als bekannt) und r (wird gesucht) aus: $|AC|$, $|CH|$, $|HB|$, $|AF|$, $|FC|$, $|CM|$.
b. Machen Sie einen Ansatz für den Radius r des gesuchten Kreises über den Höhensatz.
c. Finden Sie einen anderen Rechenweg zur Bestimmung des Radius r.
d. Konstruieren Sie den gesuchten Kreis.

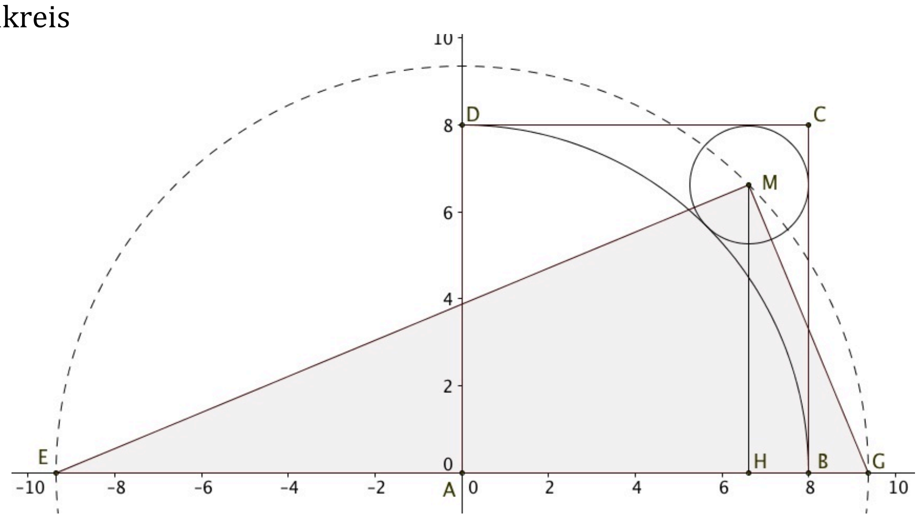
Hausübungen (Abgabe: Do, 25.6.)

2. Nach einer Aufgabe aus der Mathematik-Olympiade für die Klasse 8
   Gegeben ist ein symmetrischer Arbelos, d.h. C ist genau in der Mitte von $\overline{AB}$ (also C = M). In M wird die Senkrechte zu AB gezeichnet, der Schnittpunkt mit dem äußeren Kreis ist D. Die Strecke $\overline{AD}$ schneidet den linken, inneren Kreis in E. Der Strahl von M durch E schneidet den äußeren Kreis in F und die Senkrechte zu AB durch A in G.



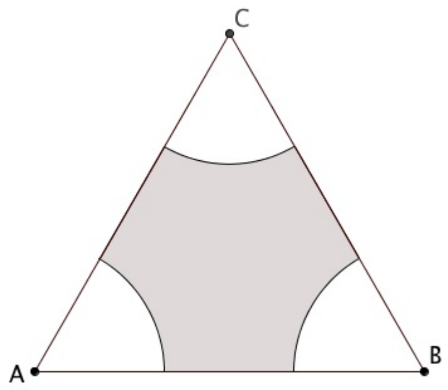
   a. Bestimmen Sie durch begründete Argumentation, wie groß die folgenden Winkel (in Grad) sind: $|\sphericalangle MAD|$, $|\sphericalangle EAG|$, $|\sphericalangle EMA|$.
   b. Begründen Sie, dass der Strahl von A durch F den Winkel $\sphericalangle EAG$ halbiert.

3. Inkreis



   In ein Quadrat ABCD mit der Kantenlänge $|AB| = 8$ wird um A ein Kreisbogen mit dem Radius 8 gezogen. Zwischen diesen Viertelkreis und Quadrat wird ein weiterer Kreis eingefügt, der den Kreisbogen von außen und zwei Quadratseiten berührt. Den Radius dieses Kreises nennen wir *r*.
   (Für einen Ansatz mit dem Höhensatz wurde ein Hilfskreis (gestrichelt) gezeichnet, der die Gerade AB in E und G schneidet.)
   a. Drücken Sie die folgenden Steckenlängen durch die Quadratseite der Länge 8 und *r* (wird gesucht) aus: $|AB|$, $|AH|$, $|GB|$, $|HG|$, $|EA|$, $|HM|$, $|AM|$.
   b. Machen Sie nun mit dem Höhensatz oder dem Satz von Pythagoras einen Ansatz und berechnen Sie den Radius *r* des Kreises.
   c. Zeichnen Sie für $|AB| = 8\text{ cm}$ das Quadrat ABCD und den Viertelkreis.
   Konstruieren Sie nun den Kreis um M, wobei Sie den berechneten Radius *r* aus Teil b. verwenden können. Beschreiben Sie die einzelnen Konstruktionsschritte.
   (Zeichnen Sie nur das, was innerhalb des Quadrates liegt. Alle Hilfslinien in der obigen Abbildung außerhalb müssen Sie nicht zeichnen.)

4. Von einem gleichseitigen Dreieck werden an den Ecken Kreissegmente weggeschnitten, wobei der Radius der Kreissegmente ein Drittel der Dreieckskante ist. Übrig bleibt die grau gefüllte Fläche. Wie viel Prozent der ursprünglichen Dreiecksfläche sind das?
Hilfe: Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreiecks mit der Kantenlänge a: $A_\Delta = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$.



5. Aufgabe zum räumlichen Vorstellungsvermögen
Versuchen Sie, diese Aufgabe nach Möglichkeit nur in Ihrer Vorstellung zu lösen. Wenn das nicht geht oder Sie unsicher sind, bleibt immer noch die Möglichkeit, es auszuprobieren.
Das rechte Bild ist die Kombination der farbigen Fläche vor und im Spiegel. Wo muss im linken Bild der Spiegel stehen (Strich einzeichnen) und von welcher Seite muss man in den Spiegel schauen (Pfeil einzeichnen)?
Halten Sie Ausschau nach mehreren Lösungen.

a.

b.