Reihen

Gegeben ist eine Zahlenfolge a

$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$

Die Zahlenfolge S, gebildet durch

$S_1 = a_1 \quad S_2 = a_1 + a_2 \quad S_3 = a_1 + a_2 + a_3$

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

heißt die Reihe zu a.

Beispiel: $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$

$a_n = a_{n-1} + 1 \quad a_1 = 1 \quad$ oder $\quad a_n = n$

$S_1 = 1 \quad S_2 = 1 + 2 = 3 \quad S_3 = 1 + 2 + 3 = 6 \quad S_7 = 1+2+3+4+5+6+7 = 28$

S ist in diesem Fall die Folge der Dreieckszahlen

Die rekursive Definition der Reihe zu einer Zahlenfolge a.

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1}, \quad S_1 = a_1$$

$$\underbrace{\underbrace{a_1 \; a_2 \; a_3 \; a_4 \; \cdots \; a_{n-1} \; a_n}_{S_n} \; a_{n+1}}_{S_{n+1}}$$

Die arithmetische Reihe

Gegeben ist eine arithmetische Zahlenfolge a

$$a_n = a_{n-1} + d \quad \text{oder} \quad a_n = a_1 + (n-1)\,d$$

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_1$$

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \dots + (a_n + a_1)$$

$+d \quad -d$

Der Inhalt der Klammern ist gleich

$$2S_n = n \cdot (a_1 + a_n) \quad \Big| :2$$

$$S_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n) \qquad \text{kompakte Summenformel}$$

Beispiel

$$S_{10} = 5 + 10 + 15 + 20 + \dots + 50$$

$$= \frac{10}{2}(5 + 50) = 5 \ \ 55 = 275$$

$$S_{10} = 5 + 10 + 15 + \dots + 45 + 50$$

$$S_{10} = 50 + 45 + 40 + \dots + 10 + 5$$

$$2S_{10} = 55 + 55 + 55 + \dots + 55 + 55$$

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \qquad a_n = a_1 + (n-1)\,d$$

$$= \frac{n}{2}\left(a_1 + a_1 + (n-1)\,d\right)$$

$$= \frac{n}{2} \cdot 2a_1 + \frac{n}{2}(n-1)\,d$$

$$\boxed{S_n = n \cdot a_1 + \frac{n(n-1)}{2}\,d}$$