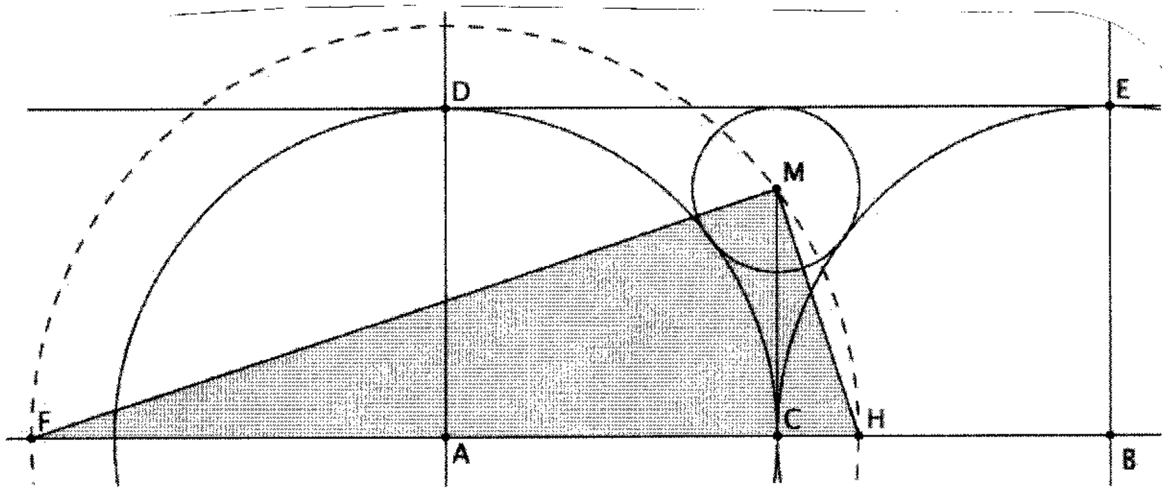
9. Übung, Lösungen

PRÄSENZÜBUNG

1.



a) $|AC| = R$, $|CH| = r$, $|HB| = R - r$

$|AF| = R + r$, $|FC| = 2R + r$, $|CM| = R - r$

b) Das Dreieck FHM ist nach dem Thalessatz rechtwinklig. In diesem gilt der Höhensatz:

$|CM|^2 = |FC| \cdot |CH|$ Wie in a) gefunden gilt dann

$(R-r)^2 = (2R+r) \cdot r$ Das ist eine Gleichung für die Unbekannte r. (R gilt als bekannt)

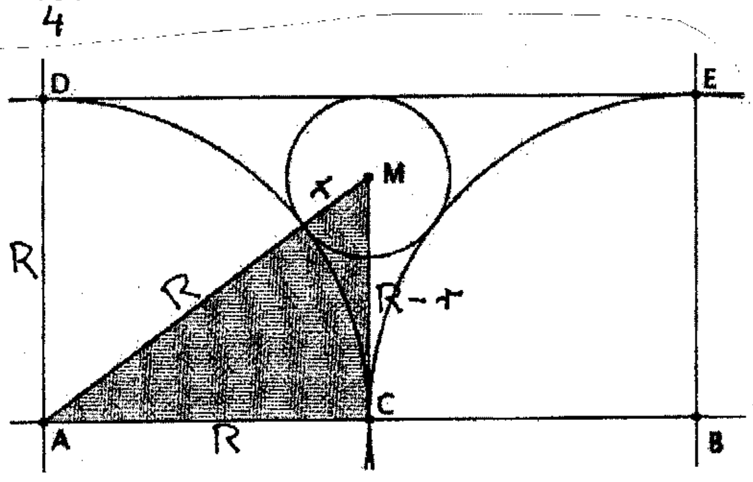
$$R^2 - 2Rr + r^2 = 2Rr + r^2$$

$$R^2 = 4Rr \quad | : R$$

$$4r = R \quad | : 4$$

$$r = \frac{R}{4}$$

c) Ein alternativer Ansatz ergibt sich aus dem rechtwinkligen Dreieck ACM mit dem Satz von Pythagoras.

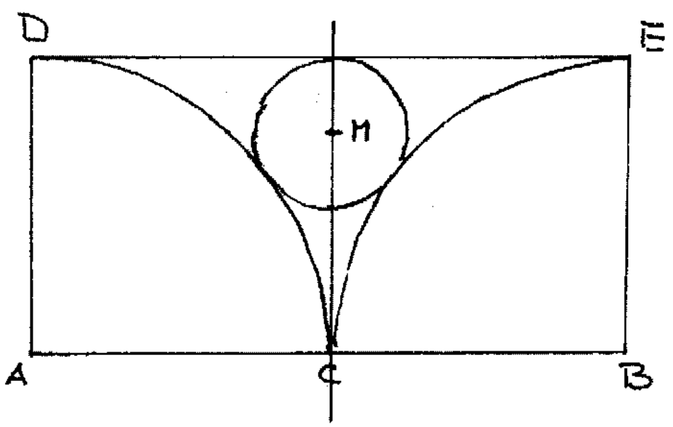


1c (Fortsetzung)

$$R^2 + (R - r)^2 = (R + r)^2$$
$$R^2 + \cancel{R^2} - 2Rr \cancel{+ r^2} = \cancel{R^2} + 2Rr \cancel{+ r^2}$$
$$R^2 = 4Rr \quad |:R$$
$$4r = R \quad |:4$$
$$r = \frac{R}{4}$$

(Dieser Ansatz ist deutlich einfacher)

d) Das Rechteck ABED mit $|AB| = 2R$ und $|BE| = R$ ist vorgegeben mit den Kreisen um A und B mit dem Radius R



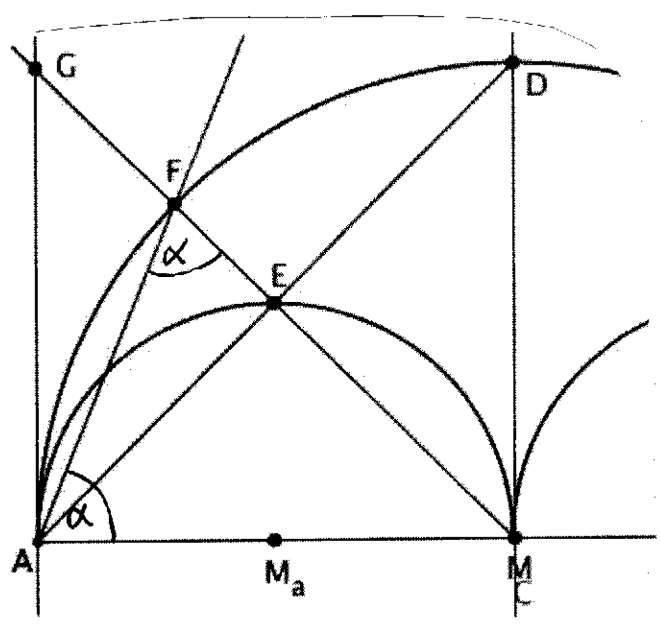
Wegen der Symmetrie der Figur liegt M auf der Senkrechten zu AB durch C. Zum gegebenen R wird $r = \frac{R}{4}$ konstruiert.

M hat von der Geraden DE den Abstand r.

HAUSÜBUNGEN

2. a. Da $|AM| = |MD| = a+b$, und $\overline{AM}$ und $\overline{MD}$ senkrecht zueinander sind, ist ΔAMD ein halbes Quadrat.
Also ist $|\sphericalangle MAD| = 45°$

1



Da $|\sphericalangle MAG| = 90°$ nach Konstruktion, ist
$|\sphericalangle EAG| = 90° - 45° = 45°$ 0,5

Da E auf dem kleinen, linken Halbkreis liegt, ist nach dem Thaleskreis (Satz v. Thales) $|\sphericalangle AEM| = 90°$

Dann gilt nach der Winkelsumme im ΔAME:
$45° + 90° + |\sphericalangle EMA| = 180° \Rightarrow |\sphericalangle EMA| = 45°$. 1,5

b. Das ΔAMF ist gleichschenklig ($|AM| = |MF|$), also sind die Winkel $\sphericalangle MAF$ und $\sphericalangle AFM$ gleich groß, sagen wir α. 1

Winkelsumme im ΔAMF: $2\alpha + 45° = 180°$
$\Rightarrow 2\alpha = 135° \Rightarrow \alpha = 67{,}5°$ 1

Zieht man von α den Winkel $\sphericalangle MAE$ mit 45° ab, erhält man $|\sphericalangle EAF| = 22{,}5°$. Das ist die Hälfte von $|\sphericalangle EAG| = 45°$. Also halbiert AF den Winkel $\sphericalangle EAG$ □ 1

3. a. $|AB| = 8$ $\quad |AH| = 8 - r$ 3
$|GB| = r$ $\quad |HG| = 2r$ je f −0,5
$|EA| = 8 + r$ $\quad |HM| = 8 - r$
$|AM| = 8 + r$

b. Ansatz mit dem Höhensatz
$|EH| \cdot |HG| = |HM|^2$ Einsetzen der Werte aus a.
$|EH| = |EA| + |AH| = 8 + r + 8 - r = 16$
$16 \cdot 2r = (8 - r)^2$ 1
$32r = 64 - 16r + r^2$
$r^2 - 48r + 64 = 0$ (*)

$r = 24 \pm \sqrt{24^2 - 64} = 24 \pm \sqrt{512}$

$= 24 \pm 16\sqrt{2}$

$r \approx 46{,}63$ oder $r \approx 1{,}37$ 2

Laut Zeichnung ist die zweite Lösung richtig.

---

alternativer Ansatz mit dem Satz v. Pythagoras

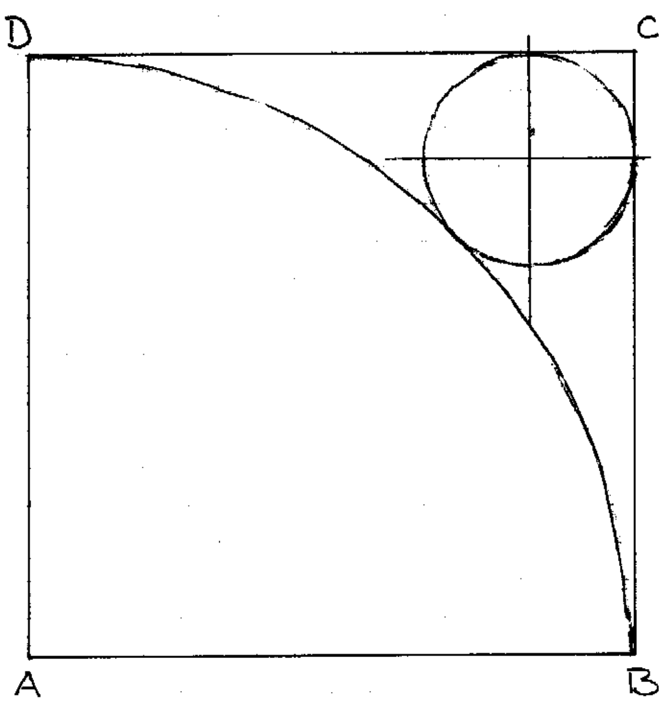
$|AM|^2 = |AH|^2 + |HM|^2$

$(8+r)^2 = (8-r)^2 + (8-r)^2$

$\cancel{64} + 16r + \cancel{r^2} = \cancel{64} - 16r + \cancel{r^2} + 64 - 16r + r^2$ 1

$r^2 - 48r + 64 = 0$ gleiche Gleichung wie (*)

3c.

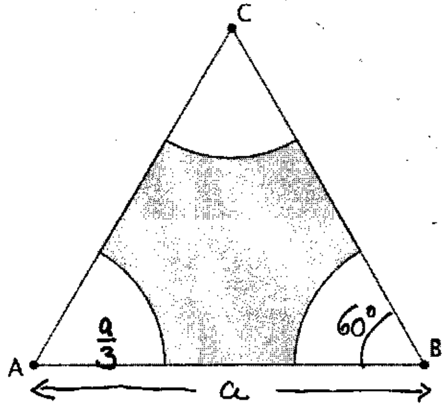


$r = 1{,}37$ cm

1. Man zeichnet zu $\overline{CB}$ eine Parallele im Abstand r (in das Quadrat)
2. Man zeichnet zu $\overline{DC}$ eine Parallele im Abstand r (in das Quadrat)
3. Der Schnittpunkt der beiden Parallelen ist der Mittelpunkt M. Um M zeichnet man einen Kreis mit dem Radius r. 2

4. Fläche des Dreiecks

$$A_{\Delta} = \frac{a^2}{2}\sqrt{3}$$



Wegen der 60° im gleichseitigen Dreieck ist jedes Kreissegment $\frac{1}{6}$ Kreis.

Also sind die 3 Kreissegmente zusammen ein Halbkreis. 1

Fläche $A_{\frown} = \frac{1}{2}\pi r^2$

Mit $r = \frac{a}{3}$ erhält man $A_{\frown} = \frac{1}{2}\pi\frac{a^2}{9} = \frac{\pi}{18}a^2$ 1

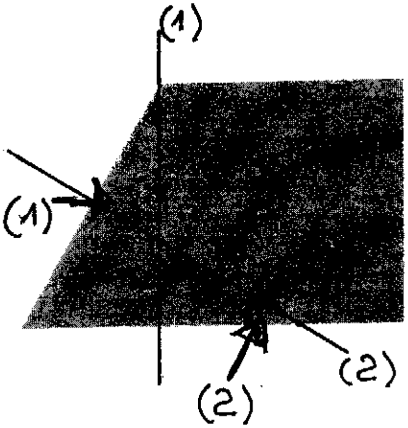
Dann ist das Verhältnis beider Flächen

$$\frac{A_{\frown}}{A_{\Delta}} = \frac{\frac{\pi}{18}a^2}{\frac{\sqrt{3}}{4}a^2} = \frac{\pi}{18}\cdot\frac{4}{\sqrt{3}} \approx 0{,}403 \approx 40\%$$

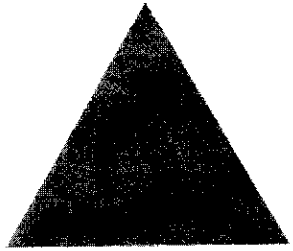
Dann ist der Rest 60%. Also ist die graue Fläche ca. 60% des Ausgangsdreiecks.

1

a. Aus

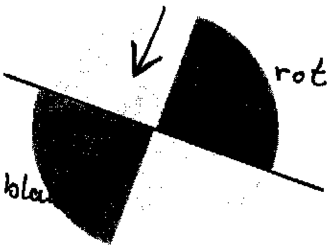


mache mit dem Spiegel

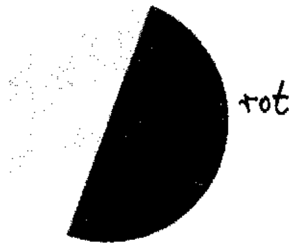


großes gleichseitiges Dreieck

b. Aus



mache mit dem Spiegel



3

A2	A3	A4	A5	Σ
6	8	4	3	21