Dr. Reimund Albers Wintersemester 2014/15

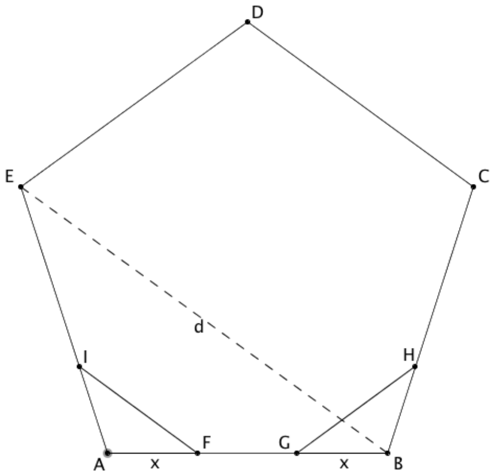
Mathematisches Denken und Lehren 1

9. Übung

Platonische und Archimedische Körper

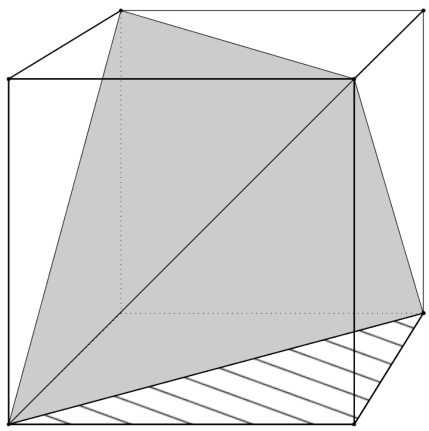
Präsenzübungen (für Di, 16.12.)

1. Geometrische Beziehungen
   Ein regelmäßiges Fünfeck ABCDE soll durch Abschneiden der Ecken in ein regelmäßiges Zehneck verwandelt werden.
   In der Zeichnung rechts sind die Schnittkanten $\overline{IF}$ und $\overline{GH}$ schon eingezeichnet. Wie lang muss *x* sein?



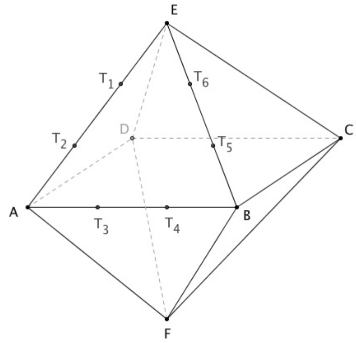
Hausübungen (Abgabe: Do, 18.12.)

2. Volumen eines Tetraeders
   Ein Tetraeder lässt sich wie dargestellt in einen Würfel einpassen.
   Für die Berechnungen wollen wir die Kantenlänge des Würfels *w* nennen, die Kantenlänge des Tetraeders *t*.



   a. Begründen Sie, dass hier tatsächlich ein Tetraeder in dem Würfel liegt, da alle Kanten (des Tetraeders) gleich lang sind.
   b. Welcher mathematische Zusammenhang besteht zwischen *w* und *t*? Schreiben Sie eine Gleichung auf.
   c. Der Tetraeder füllt natürlich das Volumen des Würfels nicht aus. Wie viele dieser Lücken zwischen Tetraeder und Würfelaußenwand gibt es? *(Aus Symmetriegründen sind diese kongruent zueinander.)*
   d. Berechnen Sie das Volumen einer Lücke.
      (Es ist eine Pyramide, Volumen = Grundfläche · Höhe : 3 . Für Grundfläche und Höhe können Sie eine geschickte oder eine sehr ungeschickte Wahl treffen. Beachten Sie die schraffierte Fläche.)
   e. Berechnen Sie auf der Basis der bisherigen Rechnungen das Volumen des Tetraeders.
   f. In Formelsammlungen findet man für das Tetraedervolumen $V = \frac{1}{12}a^3\sqrt{2}$, wobei *a* die Kantenlänge des Tetraeders ist. Vergleichen Sie das mit Ihrem Ergebnis. Sie haben mit hoher Wahrscheinlichkeit nicht dieses Ergebnis. Erläutern Sie den Unterschied und leiten Sie die Formel mit Aufg. b. her.

3. Abschneiden eines Oktaeders
Die Abbildung rechts zeigt ein Oktaeder, von dem die Ecken abgeschnitten werden sollen. Für die Schnittlinien sind einige Kanten bereits in Drittel eingeteilt (Punkte T1 bis T6).
(*Drucken Sie das Arbeitsblatt mit der großen Abbildung aus und machen Sie alle Zeichnungen auf diesem Arbeitsblatt.*)



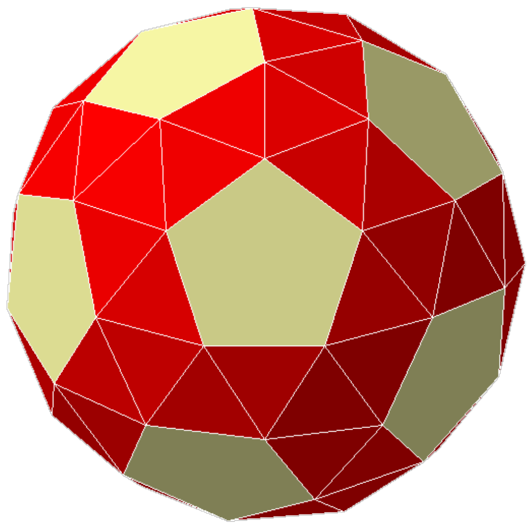
   a. Zeichnen Sie das Sechseck $T_1T_2T_3T_4T_5T_6$.
   b. Begründen Sie, dass das Sechseck ein regelmäßiges ist.
   c. „Schneiden" Sie nun in der Zeichnung alle Ecken ab. Färben Sie die sichtbaren Flächen und verwenden Sie für die Quadrate und Sechsecke unterschiedliche Farben.
   d. Angenommen, die Kantenlänge des Oktaeders ist 1. Berechnen Sie dann die Oberfläche des neu entstandenen Körpers. (Fläche eines gleichseitigen Dreiecks mit der Kante a ist $A_\Delta = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$).

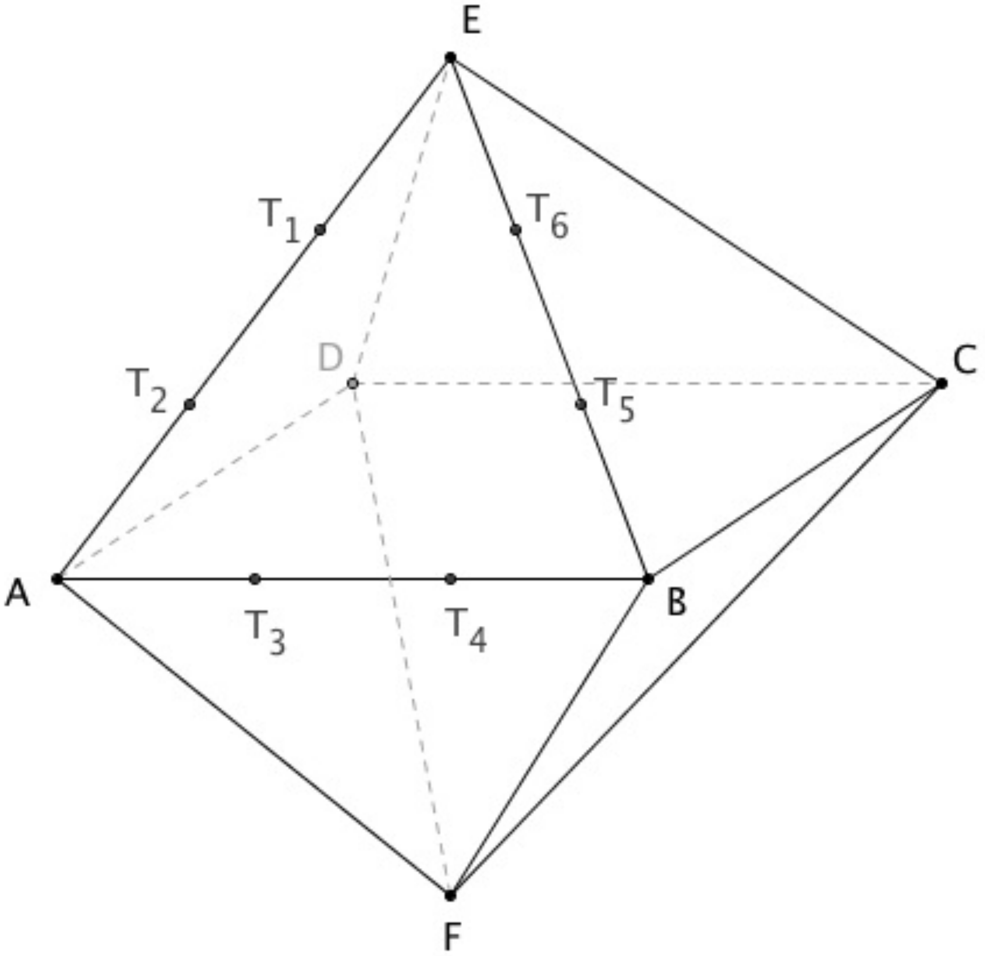
4. Zeichnen Sie ein Ikosaeder in einen Würfel. Als Vorlage finden Sie auf dem Arbeitsblatt einen Würfel gezeichnet, in den bereits die notwendigen Mittellinien und Mittelpunkte der Würfelflächen eingezeichnet sind.
In der Vorlesung hatten wir ausgerechnet, dass die Ikosaederpunkte die Mittellinien gerade im goldenen Schnitt einteilen. Messen Sie die Streckenlängen und rechnen Sie mit $\varphi \approx 0{,}618$. *(Hinweise: 1. Der Würfel ist in Zentralprojektion gezeichnet. Daher sind die nach „hinten" laufenden Linien nicht parallel zueinander und ein Mittelpunkt ist nicht die zeichnerische Mitte einer Strecke. 2. Sie können die Vorlage als GeoGebra-Datei herunterladen und die Rechnungen/Zeichnungen mit GeoGebra machen und ausdrucken.)*

Aufgabe zum räumlichen Vorstellungsvermögen

Versuchen Sie, diese Aufgabe nach Möglichkeit nur in Ihrer Vorstellung zu lösen. Wenn das nicht geht oder Sie unsicher sind, bleibt immer noch die Möglichkeit, ein Modell aus Papier auszuschneiden und es auszuprobieren

5. Das Bild zeigt einen Archimedischen Körper, das sog. Snub-Dodekaeder. Er hat zwölf Fünfecke.
   a. Wie viele Dreiecke hat der Körper?
   b. Wie viele Ecken und Kanten hat der Körper?
   Erläutern Sie jeweils, wie Sie zählen.
   c. Überprüfen Sie die Eulersche Polyederformel.




E
T1
T6
D
C
T2
T5
A
B
T3
T4
F