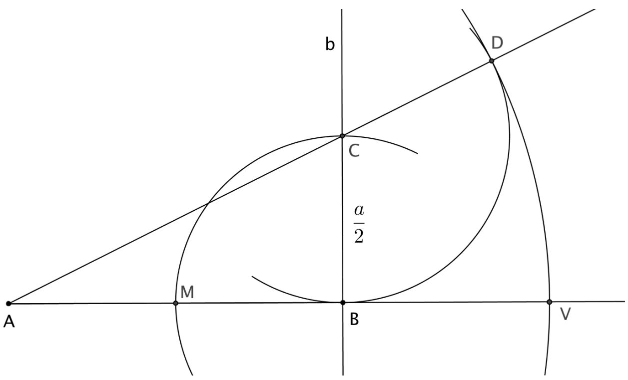
4. Übung
Goldener Schnitt, Fibonacci-Zahlen

Präsenzübungen (für Di, 11.11.)

1. Rechenspielchen
   Nehmen Sie eine natürliche Zahl und ziehen Sie davon ganzzahlige Vielfache von φ ab. Versuchen Sie, möglichst dicht an Null zu kommen.
   Beispiel: Ausgangszahl 10. Rechnet man $10-16\varphi \approx 0.1115$, liegt man noch über Null, mit $10-17\varphi \approx -0.5066$ unter Null.
   Bei welchen Zahlenkombinationen kommt man der Null besonders nahe?

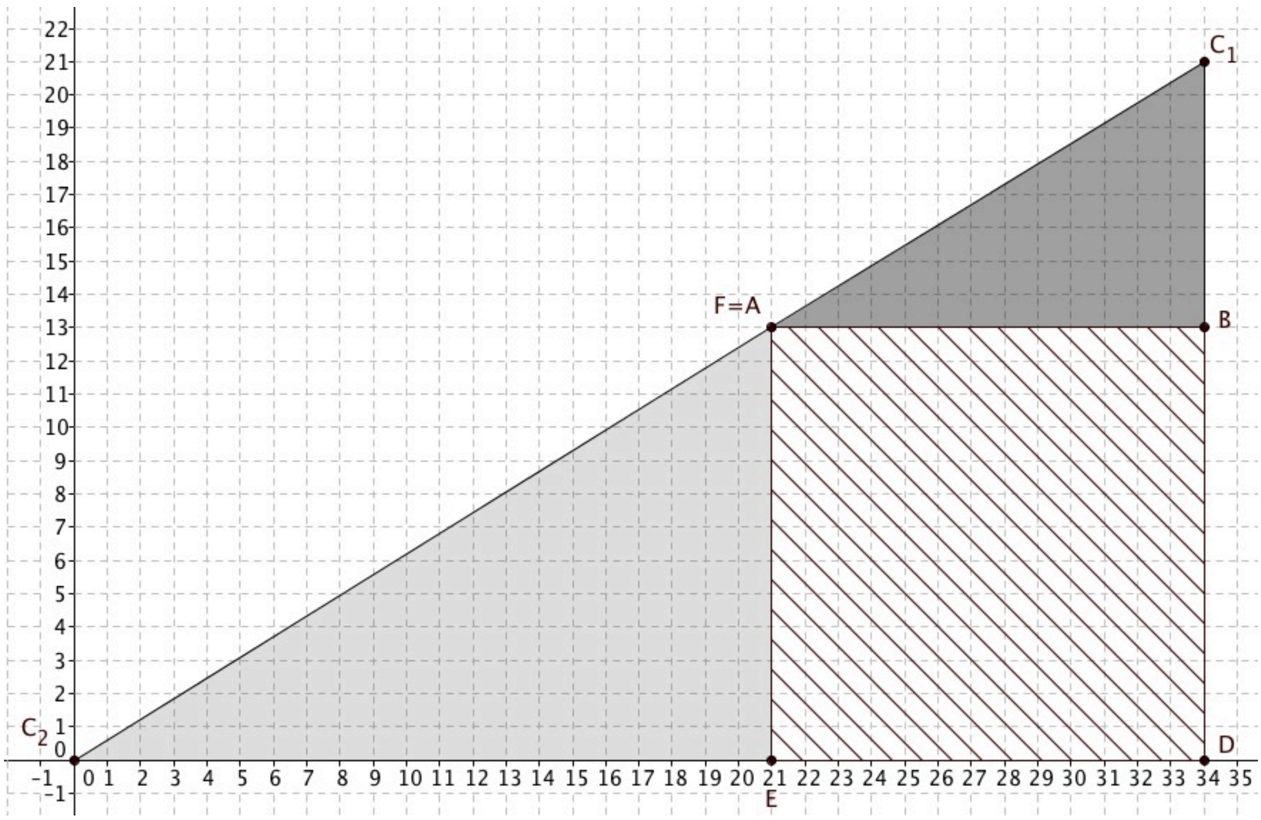
2. Die Abbildung zeigt die klassische Konstruktion der Goldenen Verlängerung.
   Gegeben ist die Ausgangsstrecke $\overline{AB}$ mit der Länge a. $\overline{AV}$ ist dann die Goldene Verlängerung dazu.
   Erläutern Sie die Konstruktion und zeigen Sie, dass $\left|AV\right| = \frac{\sqrt{5}+1}{2}a$ ist.

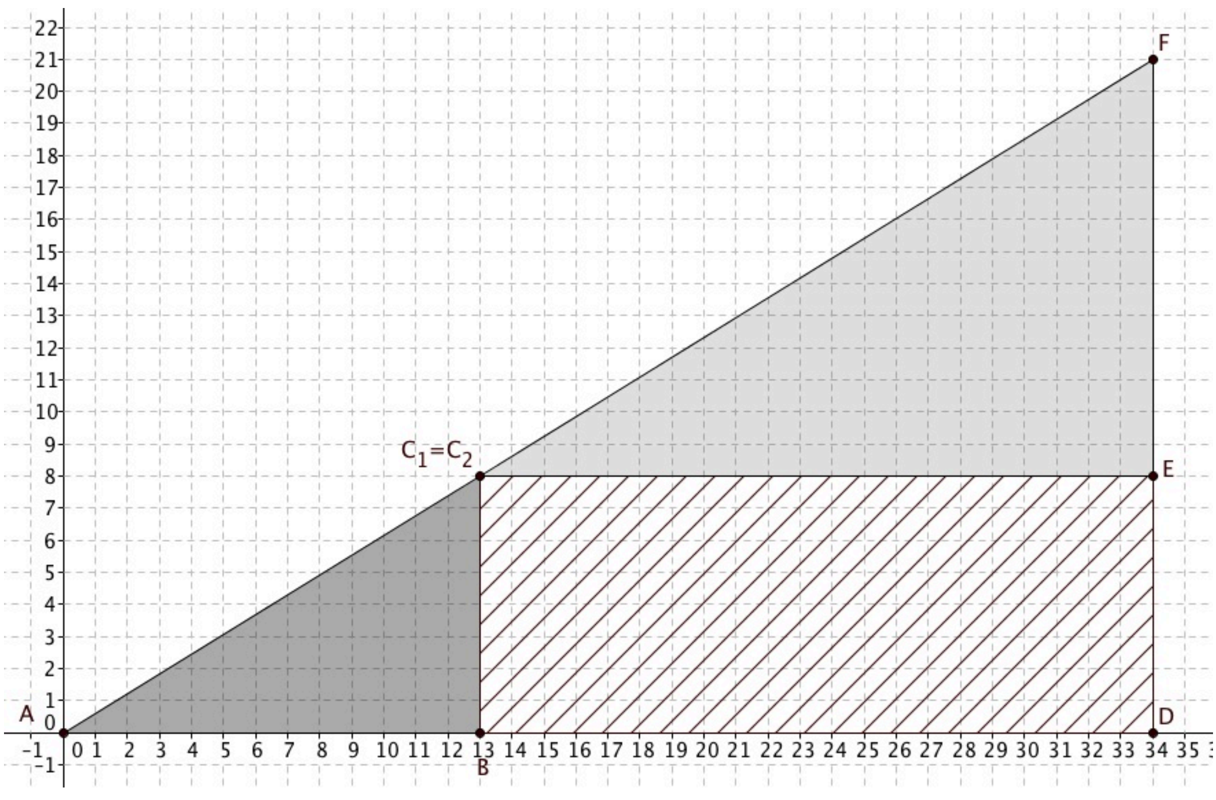


Hausübungen (Abgabe: Do, 13.11.)

3. Im Skript zu den Fibonacci-Zahlen wird auf Seite 5/6 die Summenformel $f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + ... + f_n^2 = f_n f_{n+1}$ dargestellt und mit Abbildungen erläutert. Dabei fehlt die Abbildung zu $n = 4$.
   a. Lesen Sie diesen Abschnitt im Skript.
   b. Machen Sie die Abbildung zu $n = 4$.
   c. Am Ende des Aufgabenblattes finden Sie eine Abbildung zum allgemeinen Fall. Scheiden Sie die Abbildung aus, kleben Sie sie auf Ihr Arbeitsblatt und ergänzen Sie die Beschriftung in den beiden noch unbeschrifteten Quadraten und die Kantenlängen des Rechtecks.

4. Flächenumwandlung
   Die nachfolgenden beiden Abbildungen zeigen eine Flächenumwandlung, die missglückt ist. Ermitteln Sie zu beiden schraffierten Vierecken die Längenmaße und den Flächeninhalt. Was stimmt hier nicht? Wieso ist das so?





5. Ein 1,618 m großer Maler malt auf eine vollkommen weiße Fläche mit den Maßen 3,44 m (Breite) x 2,16 m (Höhe) einen kreisrunden, schwarzen Fleck mit dem <u>Radius</u> 1,618 cm (Durchmesser 3,236 cm). Dieser soll die Schönheit an sich demonstrieren. Daher ist der schwarze Fleck auch so auf der weißen Fläche angeordnet, dass er (genauer sein Mittelpunkt) die Breite und die Höhe im Goldenen Schnitt teilt. (Für die Breite ist der Major links, für die Höhe ist der Major oben.)

Aus Bequemlichkeitsgründen unterteilt er beide Abmessungen aber tatsächlich mit 5 Achtel zu 3 Achtel.

a. Zeichnen Sie das Bild im Maßstab 1:20 auf und markieren sie dort sowohl den tatsächlichen Punkt wie auch seine theoretisch exakte Lage (bei genauer Teilung im Goldenen Schnitt, es reicht, mit $\varphi \approx 0{,}618$ zu rechnen).

b. Zeichnen Sie in Originalgröße den praktisch gemalten Fleck (Einteilung 5:3) und den theoretisch zu malenden Fleck (Einteilung mit φ) in ihrer Lage zueinander.

6. Berechnen von Fibonacci-Zahlen

Index	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Fibonacci-Zahl	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	987	1597

Für die Fibonacci-Zahlen findet man die Formel

$$f_{2n} = \left(f_{n-1} + f_{n+1}\right) f_n$$

a. Wenden Sie diese Formel an auf n = 9. Überprüfen Sie, ob Sie rechts und links des Gleichheitszeichens tatsächlich die gleiche Zahl erhalten. *(Verwenden Sie die Tabelle)*

b. Die Formel lässt sich umschreiben in $f_{2n} = 2 f_{n-1} f_n + f_n^{\,2}$. Zeigen Sie für den Fall n = 9, dass Sie die gleiche Zahl erhalten wie in a.

c. Leiten Sie aus der ersten Formel die in b. angegebene Formel her. *(Für allgemeines n, nicht für n = 9)*

d. In der Tabelle ist der höchste Index 17, in der Formel $f_{2n} = \left(f_{n-1} + f_{n+1}\right) f_n$ ist der höchste Index auf der rechten Seite n+1. Also können wir für n+1=17 den weitesten Sprung nach vorn machen. Die wievielte Fibonacci-Zahl können Sie so berechnen und wie lautet sie?

e. Für den Taschenrechner gibt es die Formel $f_n = runden\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\Phi^n\right)$ mit $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (goldene Verlängerung), wobei man für $\frac{1}{\sqrt{5}}$ und $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ möglichst viele Nachkommastellen verwendet. Rechnen Sie damit die in d. berechnete Fibonacci-Zahl nach.

zu Aufgabe 3