2. Übung
Mathematische Grundfertigkeiten, Fibonacci-Zahlen

Präsenzübungen (für Di, 28. 10.)

1. Termumformungen

   In der Formel von Binet für die Fibonacci-Zahlen $f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$

   muss man Potenzen von $\left(1+\sqrt{5}\right)$ ausrechnen.

   Machen Sie das konkret für $\left(1+\sqrt{5}\right)^4$, wobei Sie die Binomische Formel

   $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$ verwenden sollen (*um ein exaktes Ergebnis zu erhalten und keine dezimale Näherungszahl*). Am Ende bekommen Sie einen Zahlterm der Form $K_1 + K_2\sqrt{5}$ heraus. Wie lauten K_1 und K_2?

2. Termumformungen mit dem goldenen Schnitt

   Für den goldenen Schnitt gilt: $\varphi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Zeigen Sie dafür

   a. $\varphi^2 + \varphi = 1$

   b. $\frac{1}{\varphi} = 1 + \varphi$ Zeigen Sie diese Gleichung

      i. durch Einsetzen und Nachrechnen
      ii. durch Umformung aus der Gleichung a.

   c. $\varphi^3 = 2\varphi - 1$ Zeigen Sie diese Gleichung

      i. durch Näherungszahlen auf dem Taschenrechner
      ii. durch Umformung aus der Gleichung a.

Hausübungen (Abgabe: Do, 30.10.)

3. *(siehe Übung 1, Aufg. 1b)* Folgende Umformung war der Lösungsweg einer Studentin in der Klausur:

$$\frac{1}{3}n(n+1)(n-1)+(n+1)^2-(n+1) \quad (1)$$

$$=\frac{1}{3}n(n+1)(n-1)+(n+1)(n+1-1) \quad (2)$$

$$=n(n+1)\left[\frac{1}{3}(n-1)+1\right] \quad (3)$$

$$=n(n+1)\left[\frac{1}{3}n-\frac{1}{3}+\frac{3}{3}\right] \quad (4)$$

$$=n(n+1)\left[\frac{1}{3}n+\frac{2}{3}\right] \quad (5)$$

$$=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2) \quad (6)$$

Erläutern Sie diese Umformung Schritt für Schritt.

4. Zahlenketten

Unter dem Stichwort „Zahlenketten" findet das Prinzip der Fibonacci-Zahlen Eingang in die Übungsaufgaben der Grundschule. (Googeln Sie einmal nach: Zahlenketten Grundschule)

4 7 11 18 29 47 ist z.B. eine 6er-Zahlenkette, die mit 4 und 7 beginnt und mit 47 endet.

a. Wie verändert sich die letzte Zahl der 6er-Zahlenkette, wenn man die <u>erste</u> Zahl um 1 vergrößert oder verkleinert? *(Experimentieren Sie ganz konkret.)*
b. Wie verändert sich die letzte Zahl der 6er-Zahlenkette, wenn man die <u>zweite</u> Zahl um 1 vergrößert oder verkleinert? *(Experimentieren Sie ganz konkret.)*
c. 5 11 16 27 43 70 ist eine Zahlenkette, die mit 70 endet. Leiten Sie durch systematisches Probieren auf der Basis von a. und b. eine weitere Lösung her für eine 6er-Zahlenkette, die mit 70 endet. Erläutern Sie die Systematik Ihres Probierens.
d. Finden Sie <u>alle natürlichen</u> Zahlen als Startzahlen, bei denen die 6er-Zahlenkette mit 70 endet. Begründen Sie, warum es keine weiteren Lösungen geben kann.
e. Finden Sie <u>alle ganzen</u> Zahlen als Startzahlen, bei denen die 6er-Zahlenkette mit 70 endet. (*Das sind unendlich viele Zahlen, also müssen Sie eine formelmäßige Beschreibung geben.*)
f. Finden Sie <u>zwei nicht ganze Zahlen</u> als Startzahlen, bei denen die 6er-Zahlenkette mit 70 endet.

5. Man kann Variablen mit Indizes ganz unterschiedlich schreiben. Jede Schreibweise hat ihre Bedeutung, daher muss man sehr sauber und deutlich schreiben.

$$f_n^2-3 \qquad f_{n-3}^2 \qquad f_{n^2-3} \qquad f_{n^2}-3 \qquad f_{n-3^2} \qquad f_{(n-3)^2}$$

Setzen Sie jeweils $n = 4$ ein und bestimmen Sie dann das Ergebnis, wobei mit f_n die n-te Fibonacci-Zahl gemeint ist. In einem Fall bekommen sie eine Rechnung, mit der Sie die Fibonacci-Zahl nicht bestimmen können.

Index	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Fibonacci-Zahl	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	987	1597

6. Im Skript zu den Fibonacci-Zahlen wird auf Seite 7 (oben) eine allgemeine Formel vorgestellt.
   a. Konkretisieren Sie die Formel auf $m = 4$. Schreiben Sie die konkreten Fibonacci-Zahlen als Zahl hin, lassen Sie die unkonkreten Fibonacci-Zahlen stehen.
   b. Beweisen Sie die so gefundene Formel für f_{n+4}.

7. Mathematisches Argumentieren
   Bei den Fibonacci-Zahlen 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... hat man die Abfolge „ungerade, ungerade, gerade, ungerade, ungerade, gerade, ...“. Es kommen niemals zwei gerade Zahlen hintereinander vor. Begründen Sie, dass das niemals passieren kann.
   Schreiben Sie einen Begründungs**text**.
   Sie könnten z.B. beginnen mit: „Angenommen, es würden zwei gerade Fibonacci-Zahlen aufeinander folgen. ...“