1 Grundlagen der Logik

1.1 Aussagen

Def!

In der Aussagenlogik betrachtet man Aussagen und deren Verknüpfungen. Aussagen sind Sätze, die einen allgemein anerkannten Wahrheitsgehalt haben. Dabei kann eine Aussage wahr oder falsch sein.

Bsp.

Beispiele

Amerika wurde im Jahre 1492 von Columbus entdeckt. (wahr)
2008 ist der Bundeskanzler ein Mann. (falsch)

Es ist dabei auch nicht wichtig, dass die Menschheit tatsächlich weiß, ob die Aussage wahr oder falsch ist. Die Sätze

Es gibt auf anderen Planeten intelligente Wesen.
oder *Am 11. Juni 1348 hat es im Zentrum von Bremen geregnet.*

sind Aussagen. Von beiden Sätzen wissen wir nicht, ob sie wahr oder falsch sind, jedoch sind sie es prinzipiell, und wenn es erwiesen ist, so wird dieses auch allgemein anerkannt. Folglich sind die obigen beiden Sätze auch Aussagen.

Dagegen sind Meinungen wie

Mathematik ist schwer.
oder *In Bremen ist das Wetter schlecht.*

keine Aussagen, denn die Entscheidung, ob diese Sätze wahr oder falsch sind, ist nicht allgemein anerkannt.

Für die nachfolgenden Betrachtungen werden die konkreten Inhalte der Aussagen keine Rolle spielen. Wir werden allgemein Aussagen betrachten und sie abstrakt mit Variablen bezeichnen. Allgemein üblich ist es, Aussagenvariablen mit großen, lateinischen Buchstaben zu bezeichnen.

1.2 Verneinung (Negation)

Bei der Verneinung einer Aussage bildet man eine Aussage, die das Gegenteil beschreibt. Sehr oft verneint man eine Aussage dadurch, dass man das Wort „nicht" hinzufügt:

Bsp.

Ich habe die Übungsaufgaben gekonnt.
Verneinung: *Ich habe die Übungsaufgaben nicht gekonnt.*

Für eine exakte Verneinung ist es wichtig, dass dadurch alle die Fälle beschrieben werden, die in der eigentlichen Aussage nicht erfasst sind.
In manchen Fällen gibt es für die gegenteilige Eigenschaft auch spezielle Wörter: *belebt* - *unbelebt, endlich* - *unendlich, kompetent* - *inkompetent*. Hier muss man jedoch aufpassen, dass die gegenteilige Bezeichnung <u>alle</u> Möglichkeiten umfasst, die in der vorgegebenen Beschreibung nicht enthalten sind. So muss man in der Mathematik bei der Kleinerrelation für Zahlen vorsichtig sein. Zu *kleiner als* ist das Gegenteil nicht *größer als*, sondern *größer oder gleich*. Zum Beispiel hat $x < 5$ als Verneinung $x \geq 5$.

In spezieller Form begegnet einem dieses Problem bei der Zahl 0 als Grenze. Zahlen, die größer als Null sind, heißen positiv, Zahlen kleiner als Null sind negativ. Null selbst ist weder positiv noch negativ. Somit ist negativ nicht die Verneinung von positiv, da dann die Null weder in der Aussage selbst noch in der Verneinung enthalten wäre. Daher begegnet einem in Mathematikbüchern die Eigenschaft „nicht negativ“, die meint, dass eine Zahl positiv ist oder Null.

Für die Verneinung einer Aussage gibt es verschiedene Schreibweisen. Wir wählen $\neg A$ (sprich: nicht A) für die Verneinung der Aussage A.

Die Verneinung einer Aussage dreht den Wahrheitsgehalt der Aussage um. Der Wahrheitsgehalt der Aussage $\neg A$ ist also der entgegengesetzte Wahrheitsgehalt der Aussage A.
Diesen Sachverhalt kann man übersichtlich in einer Wahrheitstafel notieren:

A	$\neg A$
w	f
f	w

Bsp.

Ist beispielsweise die Aussage

A: *Ich habe die Übungen rechtzeitig abgegeben.*

falsch, so ist die Verneinung der Aussage

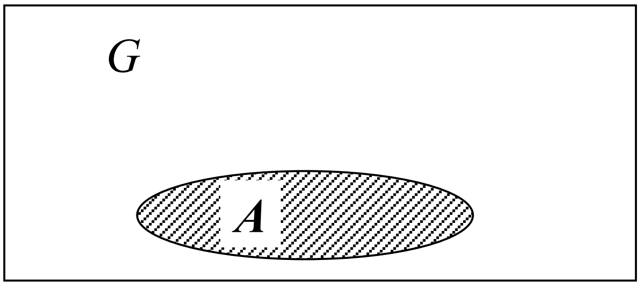
$\neg A$: *Ich habe die Übungen nicht rechtzeitig abgegeben.*

wahr.
Es gibt für Aussagen also nur zwei Wahrheitswerte, wahr oder falsch. Etwas drittes ist nicht möglich, lateinisch „tertium non datur“. Diese Zweiwertigkeit ist ein wesentlicher Grundsatz der nachfolgenden Betrachtungen zur Logik und stellt auch in mathematischen Beweisen eine Grundannahme dar. So wird in einem indirekten Beweis gezeigt, dass die exakte Verneinung einer Aussage falsch ist. Wegen des „tertium non datur“ ist damit logisch einwandfrei bewiesen, dass die ursprüngliche Aussage wahr ist.
Wir werden die Betrachtungen zur Logik jeweils durch entsprechende Mengenoperation ergänzen. Mengenlehre und Logik sind auf unserer Betrachtungsebene sehr eng miteinander verbunden. Über die Mengen können wir zusätzlich eine bildliche Darstellung liefern, die sehr einprägsam ist.
Für die mengentheoretischen Betrachtungen gehen wir immer von einer Grundmenge G aus, die alle Elemente enthält, die für eine Aussage zutreffen könnten. So ist z.B. bei Aussagen über Menschen G die Menge aller Menschen. Bei Aussagen über Zahlen ist G die Menge aller Zahlen, u.s.w.
Haben wir nun eine Aussage A, so können wir dazu die Menge aller Elemente aus G bilden, für die die Aussage A wahr ist. Diese Menge

nennen wir auch $\boldsymbol{A}$, schreiben sie aber kursiv und fett. Dann ist also die Menge $\boldsymbol{A}$ die Menge aller Elemente aus G, für die die Aussage A wahr ist. Formal schreibt man

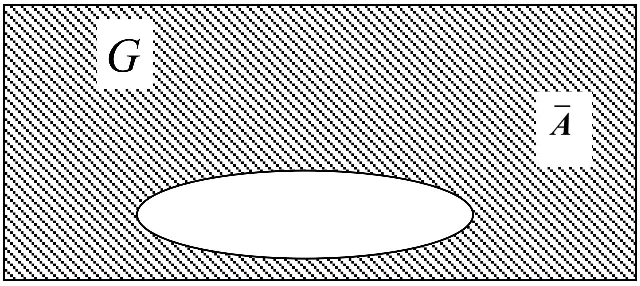
$$\boldsymbol{A} = \left\{ x \in G \mid \text{für } x \text{ ist die Aussage A wahr} \right\}.$$

So ist zum Beispiel die Aussage A = „Ich studiere in Bremen Elementarmathematik“ eine Aussage, die auf alle Menschen angewendet werden kann. Folglich ist G die Menge aller Menschen und $\boldsymbol{A}$ eine Teilmenge von G. Grafisch stellt sich das so dar:



Die Verneinung von A ist eine Aussage, zu der ebenfalls eine Menge gehört, nämlich die Menge aller Elemente aus G, für die $\neg A$ zutrifft, also wahr ist. In der Mengenlehre gibt es die Operation der Komplementmenge. Geschrieben wird sie mit einem Querstrich über der Ausgangsmenge. Zur Menge $\boldsymbol{A}$ bezeichnet also $\overline{\boldsymbol{A}}$ die Komplementmenge und sie ist definiert als

$$\overline{\mathrm{A}} = \left\{ x \in G \mid x \notin \mathrm{A} \right\}$$



1.3 Die Oder-Verknüpfung (Disjunktion)

Unter einer Verknüpfung von Aussagen versteht man die Zusammensetzung zweier oder mehrerer Aussagen zu einer. Dadurch entsteht eine neue Aussage. Verknüpft man zum Beispiel zwei Aussagen mit dem Wort „oder“, so sagt man, dass eine Oder-Verknüpfung vorliegt.

Bsp.

Wenn zum Beispiel ein Schild vor einem Nachtlokal sagt
Eintritt für Personen über 18 Jahre oder in Begleitung der Eltern!
so sind hier die beiden Aussagen

A: *„Eine Person ist mindestens 18 Jahre alt“* und
B: *„Eine Person ist in Begleitung ihrer Eltern“*
mit „oder“ zu einer neuen Gesamtaussage verknüpft.

Im normalen Sprachgebrauch kann das „oder“ zwei verschiedene Bedeutungen haben, die des einschließenden oder des ausschließenden „oder“. Unter dem einschließenden „oder“ versteht man, dass die beiden Teilaussagen auch zusammen wahr sein können um insgesamt eine wahre Aussage zu ergeben.
So ist in dem obigen Beispiel jedem klar, dass man auch dann Eintritt hat, wenn man sowohl über 18 ist als auch die Eltern dabei hat. Das „oder“ hat hier einschließende Bedeutung.
Wenn bei einem Gewinnspiel in einem Kaufhaus einem angekündigt wird:

1. Preis: eine CD oder zwei Kinokarten

so ist jedem klar, dass dieses „oder“ ausschließend gemeint ist, denn man bekommt natürlich nicht beide Preismöglichkeiten zusammen.
In der Mathematik ist das „oder“ grundsätzlich einschließend gemeint! Das ausschließende „oder“ ist als logische Verknüpfung nicht üblich, in Texten wird es immer durch „entweder ... oder“ vom üblichen einschließenden „oder“ unterschieden.

Als Schreibweise für die Oder-Verknüpfung ist „A oder B“ üblich oder das mehr formale $A \vee B$. Wir werden hier überwiegend die erste mit dem Wort „oder“ benutzen.

Bsp.

Für die Wahrheitswerte einer Oder-Verknüpfung betrachten wir das obige **Beispiel**:

Eintritt für Personen über 18 Jahre oder in Begleitung der Eltern!

Den Wahrheitswert der Gesamtaussage beurteilen wir daran, ob man Eintritt in das Lokal hat oder nicht.
Gehen wir einmal alle Möglichkeiten im Detail durch.
Ist man über 18 Jahre alt aber ohne Eltern da, so kommt man hinein. Ebenso jemand, der unter 18 Jahre ist aber mit seinen Eltern erscheint. Eine Person über 18 Jahre und in Begleitung der Eltern hat ebenfalls Eintritt, das ist die einschließende Bedeutung des „oder“. Man erhält keinen Eintritt, wenn man nicht über 18 Jahre alt ist und nicht in Begleitung der Eltern ist.

Wiederholen wir die Erkenntnis aus dem Beispiel allgemeiner:
Damit die Oder-Verknüpfung wahr ist, muss mindestens eine der beiden Teilaussagen wahr sein. Sind beide Teilaussagen wahr, so ist auch die Gesamtaussage wahr, das macht den einschließenden Charakter des „oder“ aus. Nur wenn beide Teilaussagen falsch sind, ist die Oder-Verknüpfung falsch.

Wir fassen diese Überlegungen wieder übersichtlich in einer Wahrheitstafel zusammen. Es gibt 4 Möglichkeiten (2 Aussagen mit je 2 Wahrheitswerten), die Einzelaussagen *A* und *B* mit Wahrheitswerten zu belegen.

A	*B*	*A oder B*
w	*w*	*w*
w	*f*	*w*
f	*w*	*w*
f	*f*	*f*

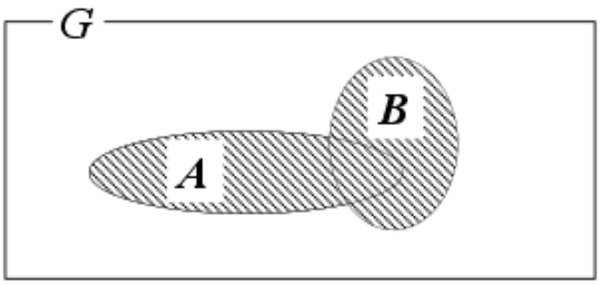
Bei der zugehörigen Betrachtung der Mengen erhalten wir in der Grundmenge *G* zwei Mengen ***A*** und ***B*** für die Aussagen *A* und *B*.

$$\boldsymbol{A} = \left\{ x \in G \mid \text{für } x \text{ ist die Aussage } A \text{ wahr} \right\}$$

$$\boldsymbol{B} = \left\{ x \in G \mid \text{für } x \text{ ist die Aussage } B \text{ wahr} \right\}$$

Zur Verknüpfung „*A* oder *B*" gehört dann die Vereinigung der beiden Mengen ***A*** und ***B***.

$$\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B} = \left\{ x \in G \mid \text{für } x \text{ ist die Aussage } A \text{ oder die Aussage } B \text{ wahr} \right\}$$



1.4 Die Und-Verknüpfung (Konjunktion)

Hier entsteht eine Zusammensetzung aus zwei oder mehreren Aussagen zu einer Aussage indem man diese Aussagen durch das Wort „und" miteinander verbindet.

Als Schreibweise für die Und-Verknüpfung ist „*A* und *B*" üblich oder das mehr formale $A \wedge B$ (lies: *A* und *B*). Wir werden hier überwiegend die erste Schreibweise mit dem Wort „und" benutzen.

Bsp.

In der Vorschrift eines Autovermieters
Sie müssen einen gültigen Führerschein haben und über 25 Jahre alt sein
werden die beiden Teilaussagen
A: *„Eine Person hat einen gültigen Führerschein"* und
B: *„Eine Person ist mindestens 25 Jahre"*

mit „und“ verknüpft.

Den Wahrheitswert der Gesamtaussage beurteilen wir darüber, ob man am Ende ein Auto erhält oder nicht. Gehen wir auch hier einmal alle Möglichkeiten im Detail durch.
Man erhält offensichtlich keinen Wagen, wenn man keinen Führerschein hat, auch wenn man über 25 Jahre alt ist.
Ebenso ist man erfolglos, wenn man zwar einen Führerschein hat, aber jünger als 25 Jahre ist.
Natürlich bekommt man den Wagen auch nicht, wenn man keinen Führerschein hat und auch nicht 25 Jahre alt ist.
Man bekommt den Wagen nur, wenn man beide Einzelbedingungen erfüllt.

Wiederholen wir diese Erkenntnis aus dem Beispiel allgemeiner:
Damit die Und-Verknüpfung wahr ist, müssen beide Teilaussagen wahr sein, ansonsten ist die Gesamtaussage falsch.
Diesen Zusammenhang können wir wieder übersichtlich in einer Wahrheitstafel darstellen:

A	*B*	*A und B*
w	*w*	*w*
w	*f*	*f*
f	*w*	*f*
f	*f*	*f*

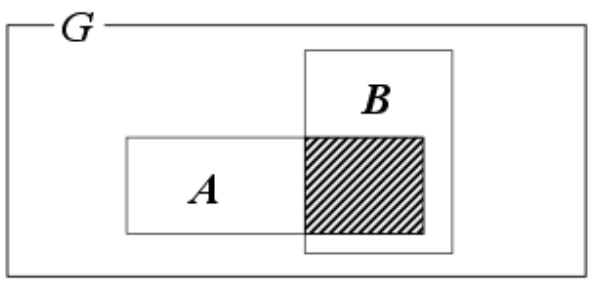
Bei der zugehörigen Betrachtung der Mengen erhalten wir in der Grundmenge *G* zwei Mengen ***A*** und ***B*** für die Aussagen *A* und *B*.

$$\boldsymbol{A} = \left\{ x \in G \mid \text{für } x \text{ ist die Aussage } A \text{ wahr} \right\}$$

$$\boldsymbol{B} = \left\{ x \in G \mid \text{für } x \text{ ist die Aussage } B \text{ wahr} \right\}$$

Zur Verknüpfung „*A* und *B*“ gehört dann der Durchschnitt der beiden Mengen ***A*** und ***B***.

$$\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} = \left\{ x \in G \mid \text{für } x \text{ ist die Aussage } A \text{ und die Aussage } B \text{ wahr} \right\}$$



1.5 Äquivalenz

Die Äquivalenz wird uns in den nachfolgenden Kapiteln oft begegnen. Sie ist die Grundlage für die logische Gleichwertigkeit von Aussagen, also so etwas wie das Gleichheitszeichen für Zahlen. Oft werden wir erkennen, dass Aussagen oder Aussageverknüpfungen den gleichen Wahrheitsgehalt haben.
Zunächst ist die Äquivalenz eine Verknüpfung von zwei Aussagen.
Man schreibt $A \Leftrightarrow B$ und liest: „*A* äquivalent *B*".

Entsprechend der genannten Gleichwertigkeit ist die Wahrheitstafel für die Äquivalenz nahe liegend. Haben *A* und *B* den gleichen Wahrheitswert, so ist die Äquivalenz wahr, bei verschiedenen Werten ist sie falsch.

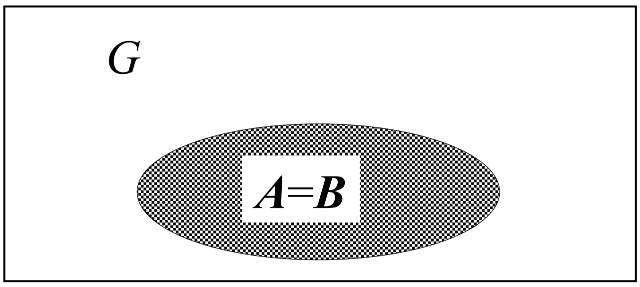
A	B	$A \Leftrightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	w

Zwei Aussagen heißen nun äquivalent, wenn beide unter jeder möglichen Interpretation oder Definition den gleichen Wahrheitswert annehmen. Oder etwas formaler, nicht aber leichter verständlich gilt:
Zwei Aussagen heißen äquivalent, wenn ihre Verbindung mit der Äquivalenz immer wahr ist.
Diese zweite Bedeutung von „A äquivalent zu B" ergibt in der Mengendarstellung die Gleichheit der zugehörigen Mengen.
Haben wir in der Grundmenge *G* zwei Mengen ***A*** und ***B*** für die Aussagen *A* und *B*,

$$\boldsymbol{A} = \left\{ x \in G \mid \text{für } x \text{ ist die Aussage } A \text{ wahr} \right\}$$

$$\boldsymbol{B} = \left\{ x \in G \mid \text{für } x \text{ ist die Aussage } B \text{ wahr} \right\},$$

so sind die Aussagen *A* und *B* äquivalent, wenn ihre zugehörigen Mengen gleich sind.



1.6 Gesetzmäßigkeiten

Wir haben bis hierher drei Aussagenverknüpfungen betrachtet. Die Gesetzmäßigkeiten, die wir in diesem Kapitel betrachten wollen, gelten für den Fall, dass diese Verknüpfungen zusammentreffen.
Im ersten Fall wollen wir betrachten, wie eine Oder- bzw. Und-Verknüpfung verneint wird.
In unserer symbolischen Schreibweise bedeutet das die Formen
$\neg(A \text{ } und \text{ } B)$ bzw. $\neg(A \text{ } oder \text{ } B)$

Wir wollen nun klären, wie die Verneinung auf die Einzelaussagen A und B verteilt werden kann, wie also die Klammern aufgelöst werden können.
Betrachten wir zunächst die Verneinung der Und-Verknüpfung. Dieses machen wir uns wieder an einem Beispiel aus der Alltagswelt klar.

Bsp.

Man bekommt einen erfolgreichen Modulabschluss, wenn man die Prüfungsvorleistungen erbracht hat und die Abschlussprüfung bestanden hat.
Wir haben also die beiden Teilaussagen
A: *Die Prüfungsvorleistungen sind erbracht* und
B: *Die Abschlussprüfung ist bestanden*
Wann ist das Gegenteil wahr, wann hat der Studierende ein Modul nicht erfolgreich abgeschlossen? Wenn er die Prüfungsvorleistungen nicht erbracht hat **oder** wenn er die Abschlussprüfung nicht besteht. Es reicht also, dass eine der beiden Bedingungen nicht erfüllt ist. Wichtig ist also, dass die Verknüpfung der einzelnen Verneinungen mit „oder“ geschieht.
Allgemein: Die Aussage „A und B“ ist nicht erfüllt, wenn eine der beiden Teilaussagen nicht erfüllt ist oder beide nicht.
Analog können wir uns überlegen, dass eine Oder-Verknüpfung dann nicht erfüllt ist, wenn beide Teilaussagen nicht erfüllt sind. Das führt auf
$\neg(A \text{ } oder \text{ } B)$ ist also gleichbedeutend mit $\neg A \text{ } und \text{ } \neg B$

Beide Gesetzmäßigkeiten nennt man die *Regeln von de Morgan*.
Wir wollen die Gültigkeit der de Morganschen Regeln mit Hilfe von Wahrheitstabellen beweisen.

Für die Und-Verknüpfung:

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A$ oder $\neg B$	A und B	$\neg(A$ und $B)$
w	*w*	*f*	*f*	*f*	*w*	*f*
w	*f*	*f*	*w*	*w*	*f*	*w*
f	*w*	*w*	*f*	*w*	*f*	*w*
f	*f*	*w*	*w*	*w*	*f*	*w*
1.	*2.*	*3.*	*4.*	*5.*	*6.*	*7.*

Und für die Oder-Verknüpfung:

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A$ *und* $\neg B$	A *oder* B	$\neg(A$ *oder* $B)$
w	*w*	*f*	*f*	*f*	*w*	*f*
w	*f*	*f*	*w*	*f*	*w*	*f*
f	*w*	*w*	*f*	*f*	*w*	*f*
f	*f*	*w*	*w*	*w*	*f*	*w*
1.	*2.*	*3.*	*4.*	*5.*	*6.*	*7.*

In der 5. und 7. Spalte sehen wir jeweils, dass die Wahrheitswerte für die Aussagen übereinstimmen.

Satz.

Fassen wir zusammen:

Die de Morganschen Regeln

$$\neg(A \text{ oder } B) \Leftrightarrow \neg A \text{ und } \neg B$$

$$\neg(A \text{ und } B) \Leftrightarrow \neg A \text{ oder } \neg B$$

Der nächste Abschnitt behandelt nun die gemischte Verwendung von „und" und „oder". Schreibt man „*A* oder *B* und *C*", so ist nicht klar, welche der beiden Verknüpfungen zuerst angewendet werden soll.
Bei Zahlen und den beiden Verknüpfungen + und · kennt man die Regel „Punkt- vor Strichrechnung". Solch eine Priorität für eine der beiden Verknüpfungen gibt es nicht, daher müssen hier in jedem Fall Klammern gesetzt werden.

Satz.

Die Verknüpfung
A oder (*B und C*) ist äquivalent zu (*A oder B*) *und* (*A oder C*)
A und (*B oder C*) ist äquivalent zu (*A und B*) *oder* (*A und C*)
So wie es die Distributivität für reelle Zahlen gibt, gibt es sie auch in der Aussagenlogik. Allerdings sind die beiden Verknüpfungen „und" und „oder" gleichwertig.
Bevor wir diese Gesetzmäßigkeiten wieder mit einer Wahrheitstafel beweisen, wollen wir die zweite Gesetzmäßigkeit an einem Beispiel erläutern:

Bsp.

Eine Fantasiestudienordnung schreibt vor, dass zur Teilnahme an einer Modulabschlussklausur die beiden Themengebiete „Grundlagen der Logik" und „Vollständige Induktion" oder „Grundlagen der Logik" und „Geometrisches Beweisen" erfolgreich absolviert sein müssen.
Schreiben wir abkürzend

A: *„Grundlagen der Logik" ist erfolgreich abgeschlossen*
B: *„Vollständige Induktion" ist erfolgreich abgeschlossen*
C: *„Geometrisches Beweisen" ist erfolgreich abgeschlossen*

so ist die Bedingung der Studienordnung (*A und B*) *oder* (*A und C*).
Anders betrachtet können wir aber feststellen, dass der Studierende an der Modulabschlussklausur also nur teilnehmen kann, wenn er „Grundlagen der Logik" erfolgreich belegt hat. Darüber hinaus muss er zumindest noch eines der beiden weiteren Themengebiete abge-

schlossen haben. Diese Überlegung ist in unserer abkürzenden Schreibweise *A und* (*B oder C*).
Den Beweis der Äquivalenz führen wir nun mit einer Wahrheitstafel durch (da nun 3 Teilaussagen beteiligt sind, umfasst die Wahrheitstafel $2^3 = 8$ Zeilen):

A	*B*	*C*	*B oder C*	*A und (B oder C)*	*A und B*	*A und C*	*(A und B) oder (A und C)*
w	*w*	*w*	*w*	*w*	*w*	*w*	*w*
w	*w*	*f*	*w*	*w*	*w*	*f*	*w*
w	*f*	*w*	*w*	*w*	*f*	*w*	*w*
w	*f*	*f*	*f*	*f*	*f*	*f*	*f*
f	*w*	*w*	*w*	*f*	*f*	*f*	*f*
f	*w*	*f*	*w*	*f*	*f*	*f*	*f*
f	*f*	*w*	*w*	*f*	*f*	*f*	*f*
f	*f*	*f*	*f*	*f*	*f*	*f*	*f*
1.	*2.*	*3.*	*4.*	*5.*	*6.*	*7.*	*8.*

Hier sind die beiden maßgeblichen Spalten 5 und 8. Die Wahrheitswerte stimmen in allen acht Zeilen überein. Damit ist die behauptete Äquivalenz nachgewiesen.
Die entsprechende Wahrheitstafel für die zweite Gesetzmäßigkeit der Distributivität soll in einer Übungsaufgabe aufgestellt werden (s.u.).

Satz.

Fassen wir die beiden Distributivgesetze zusammen:

$$A \text{ oder} \left(B \text{ und } C \right) \Leftrightarrow \left(A \text{ oder } B \right) \text{ und } \left(A \text{ oder } C \right)$$
$$A \text{ und} \left(B \text{ oder } C \right) \Leftrightarrow \left(A \text{ und } B \right) \text{ oder } \left(A \text{ und } C \right)$$

1.7 Die Implikation (Subjunktion)

Die Implikation ist einerseits eine der wichtigsten, andererseits aber auch eine der schwierigsten Formen der Aussagenlogik. Bei einer Implikation handelt es sich um eine Verknüpfung zweier Aussagen mit „Wenn...., dann...“. Zum Beispiel ist mit der Aussage: *„Wenn die Sonne scheint, dann gehe ich ins Schwimmbad“* eine Implikation gegeben.

Bsp.

Eine Implikation hat die Schreibweise $A \Rightarrow B$ (lies: Wenn A, dann B)

Im Alltag begegnen uns aber auch Ausdrücke wie „*A*, also *B*“, „Weil *A*, deshalb *B*“, „Wegen *A* gibt es *B*“ oder „Aus *A* folgt *B*“ und ähnliche Formulierungen.
In allen Fällen bezeichnet man *A* als Vorraussetzung und *B* als Folgerung.

Die Wahrheitswerte einer Implikation in Abhängigkeit von den Wahrheitswerten der einzelnen Teilaussagen wollen wir an dem oben bereits angeführten Beispiel studieren:

Bsp.

Wir haben die beiden einzelnen Aussagen

A: „Die Sonne scheint“ und

B: „Eine Person ist im Schwimmbad“

Nehmen wir an, der Student Karl hat am Vormittag seinen Kommilitonen versprochen: „Wenn heute Nachmittag die Sonne scheint, so komme ich ins Schwimmbad“. In welchem aller möglichen Fälle hat Karl gelogen? Wir spielen dazu alle Möglichkeiten durch:

Die Sonne scheint und Karl ist im Schwimmbad. Natürlich hat dann Karl am Vormittag die Wahrheit gesagt. Das sehen wir genau so, wenn die Sonne nicht scheint und Karl nicht im Schwimmbad ist. Nun scheint die Sonne und Karl ist nicht im Schwimmbad. Dann hat Karl am Vormittag unzweifelhaft gelogen. Was ist aber, wenn die Sonne nicht scheint, Karl dennoch im Schwimmbad ist. Erweist sich dann seine Aussage am Vormittag als Lüge? Er hat sich mit seiner Aussage für den Fall festgelegt, dass die Sonne scheint. Für den Fall, dass die Sonne nicht scheint, hat er keinerlei Aussage getroffen. Also kann er dann im Schwimmbad erscheinen oder nicht.

Allgemein können wir das für eine Implikation $A \Rightarrow B$ soeben Eingesehene folgendermaßen zusammenfassen:

Ist die Voraussetzung A erfüllt, so muss die Folgerung B auch erfüllt werden, damit die Implikation als Ganzes wahr wird. Ist die Folgerung B nicht erfüllt, so ist die Implikation falsch.

Ist dagegen die Voraussetzung A nicht erfüllt, so kommt es auf die Folgerung nicht mehr an, denn in dem Fall ist man nicht gebunden. Die Implikation als Gesamtaussage ist in beiden Fällen wahr. Für diese Regel gibt es ebenfalls einen lateinischen Ausdruck: „ex falso quod libet“.

Wir können dieses in einer Wahrheitstafel zusammenfassen. Die letzten beiden Zeilen zeigen das „ex falso quod libet“.

A	B	$A \Rightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

Die Implikation ist demnach nur falsch, wenn die Voraussetzung A wahr ist und die Folgerung B falsch.

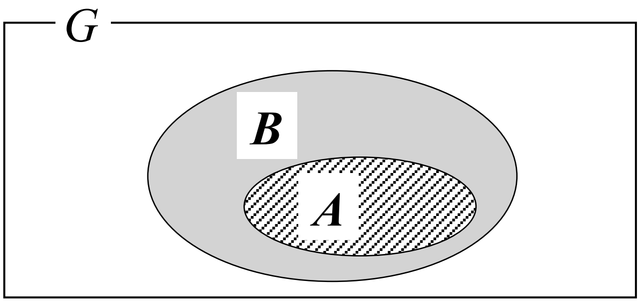
Auch zu dieser Verknüpfung von zwei Aussagen gibt es eine mengentheoretische Entsprechung. Ergeben die beiden Aussagen A und B in

Bezug auf eine Grundmenge *G* wieder die beiden Mengen ***A*** und ***B***, so ergibt die Implikation die Bedingung:
Gilt $x \in A$, so muss auch $x \in B$ erfüllt sein. Ist dagegen $x \notin A$ so darf *x* sowohl ein Element von **B** sein oder auch nicht.

$$\boldsymbol{A} = \left\{ x \in G \mid \text{für } x \text{ ist die Aussage } A \text{ wahr} \right\}$$

$$\boldsymbol{B} = \left\{ x \in G \mid \text{für } x \text{ ist die Aussage } B \text{ wahr} \right\}$$

Zur Verknüpfung „$A \Rightarrow B$“ gehört dann die Teilmengenrelation der beiden Mengen ***A*** und ***B***, also $\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{B}$



1.7.1 Die Begriffe „hinreichend“ und „notwendig“

Im Zusammenhang mit der Implikation tauchen die Begriffe „hinreichend“ und „notwendig“ auf. Sie haben in der Aussagenlogik die gleiche Bedeutung wie in unserer Umgangssprache, was noch deutlicher wird, wenn wir „hinreichend“ durch „ausreichend“ ersetzen.

Bsp.

Betrachten wir wieder ein Beispiel aus der Alltagswelt:
A: *„Ich schreibe eine Bachelorarbeit“*
B:*„Ich bin Student“*

Wir können nun zwei Implikationen bilden:
$A \Rightarrow B$: *„Wenn ich eine Bachelorarbeit schreibe, dann bin ich Student“*
$B \Rightarrow A$: *„Wenn ich Student bin, dann schreibe ich eine Bachelorarbeit.“*
Die Implikation $A \Rightarrow B$ ist wahr. Die Aussage *A* ist hinreichend für die Aussage *B*. Schreibt jemand eine Bachelorarbeit, so ist diese Information ausreichend dafür, zu folgern, dass diese Person ein Student sein muss. Andererseits ist die Aussage *B* notwendig für die Aussage *A*: Es ist notwendig ein Student zu sein, um eine Bachelorarbeit zu schreiben.
$B \Rightarrow A$: Diese Implikation ist nicht allgemein wahr. Nicht jeder, der Student ist, muss gerade an einer Bachelorarbeit schreiben. Diese Person kann auch schon an der Masterarbeit schreiben oder sich erst im ersten Semester befinden. Es reicht also nicht aus Student zu sein,

um daraus schließen zu können, dass die betreffende Peron eine Bachelorarbeit schreibt.

Allgemein können wir zusammenfassen:

Ist die Implikation $A \Rightarrow B$ wahr, so gilt: A ist hinreichend für B und (gleichbedeutend) B ist notwendig für A.

Dass etwas (B) notwendig ist für etwas anderes (A) erläutern wir sehr schnell so, dass wir verdeutlichen: „Wenn man B nicht hat, dann ist A auf jeden Fall nicht erreichbar.“ Diese Verneinung und gleichzeitige Umdrehung führt zur interessanten Konstruktion der Kontraposition.

1.7.2 Kontraposition

Bsp.

Auf jedem Amt weiß man: Es ist ein schriftlicher Antrag notwendig, um einen bestimmten Amtsvorgang zur erreichen, z.B. um einen Ausweis zu bekommen. Woran merkt man diese Notwendigkeit? Am deutlichsten an der Erklärung: Wenn man keinen Antrag stellt, dann bekommt man keinen Ausweis. Diese Konstruktion ist eine Kontraposition, und zwar zur Implikation „*Wenn man einen Ausweis hat, dann hat man (vorher) einen Antrag gestellt*“.
Zunächst ist die Kontraposition zu einer Implikation eine sehr formale Konstruktion: Man verneint in einer Implikation die beiden Teilaussagen und dreht die Implikationsrichtung um.
In der formalen Schreibweise wird das deutlicher:

Def!

Zu $A \Rightarrow B$ ist die Kontraposition $\neg B \Rightarrow \neg A$
Dabei ist der letzte Ausdruck nicht die Verneinung von $A \Rightarrow B$. Das ist eine beliebte Fehlannahme. Die Verneinung einer Implikation wird noch behandelt. Es bleibt die Frage, in welchem Verhältnis die Kontraposition zur Ausgangsimplikation steht.
Wir haben inzwischen genug formale Werkzeuge über die Logik zur Verfügung, dass wir dieses Problem einfach in einer Wahrheitstafel „ausrechnen“.

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \Rightarrow B$	$\neg B \Rightarrow \neg A$
w	w	f	f	w	w
w	f	f	w	f	f
f	w	w	f	w	w
f	f	w	w	w	w

Wie wir anhand der letzten beiden Spalten sehen können, haben die Aussagen $A \Rightarrow B$ und $\neg B \Rightarrow \neg A$ den gleichen Wahrheitswert und sind somit äquivalent.

Zusammenfassung:

Def! Zu einer Implikation $A \Rightarrow B$ ist die Kontraposition die Aussage $\neg B \Rightarrow \neg A$.

Satz. Ausgangsimplikation $A \Rightarrow B$ und Kontraposition $\neg B \Rightarrow \neg A$ sind logisch äquivalent, kurz $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$.

1.7.3 Die Nicht- Oder Form zur Implikation

Bsp. Gewisse Vorschriften, besonders im Zusammenhang mit einer Strafandrohung, begegnen einem manchmal in der Form:

Sie unterlassen die Behauptung ..., oder es droht Ihnen eine Strafe von 5000 Euro.

Oder weniger formal:

Du hörst jetzt auf zu quengeln, oder du gehst ins Bett.

Es ist nicht schwer, beide Aussagen in eine Implikation umzuformulieren:

Wenn Sie die Behauptung ... noch einmal aufstellen, dann zahlen Sie eine Strafe von 5000 Euro.

Wenn du weiter quengelst, dann gehst du ins Bett.

In diesem Fall können wir die logische Struktur leicht formalisieren: Wenn A, dann B. Oder in Zeichen $A \Rightarrow B$.

Dann haben die beiden zu Beginn des Abschnitts aufgestellten Vorschriften die Struktur „Nicht A oder B“ oder in Zeichen $\neg A \text{ oder } B$.

Von unserem umgangssprachlichen Verständnis erscheinen uns beide Aussageformen jeweils gleichwertig, die „Wenn ..., dann ...“-Form und die „Nicht ... oder ...“-Form. Ob beide Konstruktionen logisch äquivalent sind, können wir an einer Wahrheitstafel überprüfen.

A	B	$\neg A$	$\neg A \vee B$	$A \Rightarrow B$
w	w	f	w	w
w	f	f	f	f
f	w	w	w	w
f	f	w	w	w

Anhand der letzten beiden Spalten sehen wir, dass die Ausdrücke $\neg A \text{ oder } B$ und $A \Rightarrow B$ logisch gleichwertig zueinander sind.

Zusammenfassung:

Satz.

$$\left(A \Rightarrow B\right) \Leftrightarrow \left(\neg A \text{ oder } B\right)$$

1.7.4 Die Verneinung einer Implikation

Die soeben erkannte Nicht-Oder-Form zu einer Implikation gibt uns nun die Möglichkeit, die Verneinung einer Implikation herzuleiten.

Bsp.

Das Beispiel „Wenn Sie ... behaupten, dann zahlen Sie eine Strafe“ können wir logisch äquivalent umformen in die Nicht-Oder-Form „Sie unterlassen die Behauptung ..., oder Sie zahlen eine Strafe“. Wann wird diese Vorschrift nicht eingehalten, also verneint? Wenn jemand die Behauptung aufstellt und (dennoch) keine Strafe zahlen muss. Das hat die formale Struktur $A \text{ und } \neg B$ und stellt in diesem Beispiel die Verneinung zu $\neg A \text{ oder } B$ dar.

Wir haben inzwischen genug formal-logisches Wissen zusammengetragen, dass wir die Verneinung einer Implikation formal herleiten können und damit wieder einmal das bestätigen können, was uns unser „gesunder Alltagsverstand“ nahe legt.

Beweis

Die Implikation $A \Rightarrow B$ wird verneint.

$\neg(A \Rightarrow B)$	Umwandeln in die Nicht-Oder-Form
$\Leftrightarrow \neg(\neg A \text{ oder } B)$	Hineinziehen der Verneinung in die Klammer
$\Leftrightarrow \neg\neg A \text{ und } \neg B$	Auflösen der doppelten Verneinung
$\Leftrightarrow A \text{ und } \neg B$	

Natürlich lässt sich dieser Zusammenhang auch anhand einer Wahrheitstafel zeigen:

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \Rightarrow B$	$A \wedge \neg B$
w	*w*	*f*	*f*	*w*	*f*
w	*f*	*f*	*w*	*f*	*w*
f	*w*	*w*	*f*	*w*	*f*
f	*f*	*w*	*w*	*w*	*f*
1.	*2.*	*3.*	*4.*	*5.*	*6.*

Die 6. Spalte hat in jeder Zeile den entgegengesetzten Wahrheitswert zu dem in der 5. Spalte.

Die Verneinung einer Implikation ist wichtig, wenn man eine Aussage der Form $A \Rightarrow B$ indirekt beweisen will. Man zeigt dann, dass $A \text{ und } \neg B$ falsch ist.

Bsp.

Das wollen wir an dem Beispiel „$\sqrt{2}$ ist irrational“ verdeutlichen (ein in der Mathematik berühmter Beweis). Wir können diese Behauptung folgendermaßen als Implikation schreiben:

$x = \sqrt{2} \Rightarrow x$ ist irrational

Die Verneinung dieser Implikation ist $x=\sqrt{2}\ und\ x$ ist rational. Diese Aussage wird in dem berühmten Beweis zum Widerspruch geführt.

Zusammenfassung:

Satz.

$$\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A\ und\ \neg B)$$

1.8 Quantoren

Die Aussagenlogik, deren Grundzüge wir in den vorangehenden Abschnitten dargestellt haben, kann zur Prädikatenlogik erweitert werden. Auf deren wesentlichen Teil, nämlich die Frage, für welche Objekte eine Aussage gelten soll, wollen wir hier nur kurz eingehen. Dieser Abschnitt ist weit davon entfernt, die Prädikatenlogik umfassend darzustellen.

Der Wahrheitswert einer Aussage kann davon abhängen, welche Objekte für die Aussage zugrunde gelegt werden.

Bsp.

Beispiel

Die Aussage „$x^2 = 2$ hat keine Lösung“ ist richtig, wenn man für *x* die Menge der ganzen Zahlen zugrunde legt, in Bezug auf die reellen Zahlen ist die Aussage falsch. Diese Angabe der Grundmenge ist oft wichtig.

Weiterhin unterscheidet man bei der Gültigkeit einer Aussage, ob es ausreicht, dass wenigstens ein Element der Grundmenge die Aussage erfüllt oder alle. Das formalisiert man mit Quantoren.

Der Quantor für „es gibt (wenigstens ein Element)“ wird mit dem Zeichen „$\exists$ “ geschrieben. Für „für alle (Elemente)“ schreibt man „$\forall$ “.

Bsp.

Beispiele (*P* bezeichne die Menge der Primzahlen)

$\exists p \in P : p$ ist gerade („es gibt ein *p* Element *P* mit: *p* ist gerade“)

$\forall p \in P : p \mid ab \Rightarrow p \mid a\ oder\ p \mid b$ („für alle *p* Element *P* gilt: teilt *p* das Produkt *ab*, so teilt *p a* oder *p* teilt *b*“)

Neben dieser schlichten Angabe eines Quantors wollen wir betrachten, wie eine Verneinung auf sie wirkt. Für die folgenden Regeln sei *M* eine beliebige Grundmenge, auf deren Elemente die Aussage *A* zutrifft oder nicht.

Regel vom Gegenbeispiel:

Behauptet z.B. jemand „Alle Studierenden dieser Vorlesung haben Sachkunde als Zweitfach“, so ist diese Behauptung bereits dadurch widerlegt, dass es einen Studierenden gibt, für den das nicht zutrifft.

Allgemein formal bedeutet das:

$\neg\left(\forall x \in M : A\right) \Leftrightarrow \left(\exists x \in M : \neg A\right)$

Symmetrisch dazu gilt für die Verneinung einer Existenzaussage:

$\neg\left(\exists x \in M : A\right) \Leftrightarrow \left(\forall x \in M : \neg A\right)$

Will man also eine Existenzaussage widerlegen, so muss man für alle Elemente der Grundmenge nachweisen, dass die Aussage A nicht erfüllt ist.

1.9 Übungsaufgaben

1. (Aufgabe der Mathematik-Olympiade, Landesrunde, 6. Klasse)
   Rubin, Sarah, Omar und Viola malen im Kunstunterricht eine Wand mit gelber Farbe an. Plötzlich wird der Farbeimer (von einem der vier) umgestoßen und die Farbe breitet sich im ganzen Kunstraum aus. Wer war es nun?
   (1) Rubin sagt: ”Sarah hat die Farbe verschüttet. Ich war es nicht!“
   (2) Daraufhin sagt Sarah: ”Omar hat es getan; Rubin war es wirklich nicht.“
   (3) Omar meint: ”Sarah war es nicht; ich habe die Farbe umgestoßen.“
   (4) Viola sagt: ”Omar war es nicht; Rubin hat die Farbe umgekippt.“
   Bei jedem Schüler ist eine der Aussagen wahr und eine falsch.
   Wer war es denn nun?

2. Zeigen Sie mit einer Wahrheitstafel das Distributivgesetz
   $A \text{ oder } (B \text{ und } C) \Leftrightarrow (A \text{ oder } B) \text{ und } (A \text{ oder } C)$

3. Der Verkäufer verspricht Ihnen: „Bei dieser Autopolitur müssen Sie sich weder anstrengen noch viel Geld ausgeben.“ In diesem Satz ist A: man muss sich anstrengen und B: man muss viel Geld ausgeben.
   a. Entwickeln Sie mit diesem Beispiel die Wahrheitstafel für die (nicht formalisierte) „weder-noch“-Verknüpfung.
   b. Zu welcher der von uns behandelten Junktoren ist die „weder-noch“-Verknüpfung das Gegenteil?

4. Zeigen Sie durch eine Wahrheitstafel, dass gilt:
   $\left(A \Leftrightarrow B\right) \Leftrightarrow \left(\left(A \Rightarrow B\right) \text{ und } \left(B \Rightarrow A\right)\right)$

5. Ein mathematisch gebildeter Mensch kritisiert, dass der Satz
   „Die Lösungen von $x^2 - x - 2 = 0$ sind x = -1 und x = 2“
   falsch sei.
   Was spricht für seine Auffassung? Was spricht dagegen?

6. Logik in Volksliedern
   „Mein Hut der hat drei Ecken, drei Ecken hat mein Hut,
   und hät’ er nicht drei Ecken, so wärs auch nicht mein Hut!“
   Die erste Zeile interpretieren wir einmal als die Implikation:
   „Wenn ein Hut mein Hut ist, dann hat er drei Ecken.“
   Was ist dann die zweite Zeile?
   - Die Verneinung der ersten?
   - Äquivalent zur ersten?
   - Eine vollkommen neue Information?
   - Die Kontraposition zur ersten?
   Schreiben Sie einen kurzen Kommentar.

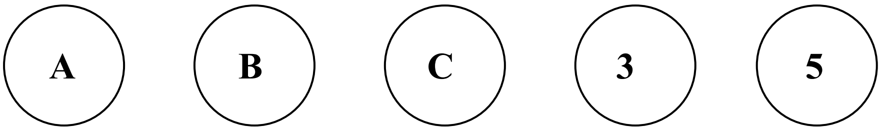
7. Psalm 90: „Das Leben währt 70 Jahr’ und wenn es hoch kommt 80 Jahr’ und *wenn es köstlich war, dann war es Müh’ und Arbeit*“.
   a. Bilden Sie für den „*Wenn ... dann*“ Teil die Kontraposition.
   b. Welches Versprechen macht der Psalm denjenigen Menschen, die sich mühen und viel arbeiten?

8. Alle Spielmarken eines Spiels haben auf der einen Seite einen Buchstaben, auf der anderen Seite eine Ziffer. „Wenn auf der einen Seite ein Konsonant ist, dann steht auf der anderen Seite eine gerade Ziffer “.

   A K 2 5

   Welche der vier Spielmarken muss man umdrehen, um die oben stehende Regel zu überprüfen? Was muss dann auf der anderen Seite stehen? Weshalb muss man die anderen Spielmarken nicht umdrehen?

9. Alle Spielmarken eines Spiels haben auf der einen Seite einen Buchstaben und auf der anderen Seite eine Ziffer.



Welche der gezeigten Spielmarken müssen Sie umdrehen, um zu testen, ob sie der Regel entsprechen: „Wenn der Buchstabe A oder B ist, dann ist die Ziffer keine 5“. Was muss dann die andere Seite zeigen? Weshalb muss man die anderen Spielmarken nicht umdrehen?

10. Hinreichende und notwendige Bedingungen
    a. Beurteilen Sie für die nachfolgenden Aussagenpaare
    - ob *A* hinreichend für *B* ist
    - ob *A* notwendig für *B* ist oder
    - ob *A* hinreichend und notwendig für *B* ist

    und erläutern Sie kurz Ihre Beurteilung.
    i. *A:* *n* ist durch 10 teilbar *B:* *n* ist gerade
    ii. *A:* Gerade *g* ist parallel zu *h* *B:* Gerade *h* ist parallel zu *g*
    iii. *A*: Ich habe 50% in den Übungsaufgaben.
    B: Ich bestehe die Klausur in Mathe am Ende dieses Semesters.
    iv. *A*: Ich bestehe die Klausur im Wintersemester
    B: Ich bin für die Abschlussklausur zugelassen
    v. *A*: *n* lässt beim Teilen durch 8 einen Rest von 4
    B: *n* ist durch 4 teilbar
    vi. in Aufgabe 8
    A: Auf einer Seite steht ein Vokal.
    B: Auf einer Seite steht eine ungerade Zahl.

    b. Geben Sie je ein umgangssprachliches Beispiel für Aussagen *A* und *B* an, so dass
    i. *A* hinreichend für *B* ist
    ii. *A* notwendig für *B* ist.

11. Bilden Sie zu den nachfolgenden Implikationen einmal die „nicht-oder“-Form und dann die Kontraposition. Bilden Sie dann die Verneinung. Schreiben Sie kurz eine Bemerkung, wenn diese Konstruktionen keinen wirklichen Sinn ergeben.
    a. „Wenn du dich beeilst, dann bekommst du noch den Zug.“
    b. Wenn n durch 6 teilbar ist, dann ist n gerade.
    c. „Wenn heute Nachmittag die Sonne scheint, dann bin ich im Schwimmbad.“
    d. „Wenn Sie über 25 sind und einen gültigen Führerschein haben, dann können Sie dieses Auto mieten.“

12. Zur „Wenn - dann“- Aussage: „Wenn du dich beeilst, dann bekommst du noch den Zug.“ (Satz 1) ist die „nicht-oder“-Form: „Beeil dich nicht, oder du bekommst (noch) den Zug“ (Satz 2), was seltsam klingt und einen ironischen Unterton enthält. Passender erscheint der „nicht-oder“-Satz: „Beeil dich, oder du bekommst den Zug nicht (mehr)“ (Satz 3)
    a. Zu welcher „Wenn - dann“- Aussage gehört der zweite „nicht-oder“-Satz? (Satz 4)
    b. In welchem Verhältnis stehen Satz 1 und Satz 4?
    c. Bilden Sie zu Satz 1 die Kontraposition (Satz 5). Bilden Sie dann dazu den „nicht-oder“-Satz (Satz 6). Stimmt dieser mit einem der oben gebildeten„nicht-oder“-Sätzen (Satz 2 oder 3) überein?
    d. Welche der Sätze 1 bis 6 sind zueinander logisch äquivalent?

13. Im Normalfall gilt:
    „Wenn jemand den Masterabschluss hat, dann hat er (vorher) den Bachelor gemacht.“
    a. Was verstößt gegen diesen „Normalfall“? Verneinen Sie die Implikation.
    b. Bilden Sie zur Implikation die Umkehrung. Ich das eine „immer wahre“ Aussage, also der Normalfall?
    c. Bilden Sie zur Implikation die Kontraposition. Erläutern Sie kurz die entstandene Aussage unter Verwendung von „notwendig“ oder „ausreichend“.

14.

a. Zeigen Sie mit einer Wahrheitstafel die Äquivalenz von $(A \Rightarrow B) \Rightarrow C$ und der Aussage $(\neg A \Rightarrow C)$ und $(B \Rightarrow C)$

b. Kommentieren Sie die äquivalenten Umformungen

$$(A \Rightarrow B) \Rightarrow C$$
$$\Leftrightarrow (\neg A \text{ oder } B) \Rightarrow C$$
$$\Leftrightarrow \neg(\neg A \text{ oder } B) \text{ oder } C$$
$$\Leftrightarrow (A \text{ und } \neg B) \text{ oder } C$$
$$\Leftrightarrow (A \text{ oder } C) \text{ und } (\neg B \text{ oder } C)$$
$$\Leftrightarrow (\neg A \Rightarrow C) \text{ und } (B \Rightarrow C)$$

15.

a. Zeigen Sie über eine Wahrheitstafel, dass gilt:

$$\big((A \textit{ und } B) \Rightarrow C\big) \Leftrightarrow \big((A \Rightarrow C) \textit{ oder } (B \Rightarrow C)\big)$$

b. Kommentieren Sie die einzelnen Umformungen des folgenden Beweises

$$(A \textit{ und } B) \Rightarrow C$$
$$\Leftrightarrow \neg(A \textit{ und } B) \textit{ oder } C$$
$$\Leftrightarrow \neg A \textit{ oder } \neg B \textit{ oder } C$$
$$\Leftrightarrow \neg A \textit{ oder } C \textit{ oder } \neg B \textit{ oder } C$$
$$\Leftrightarrow (A \Rightarrow C) \textit{ oder } (B \Rightarrow C)$$

16. Verneinen Sie die nachfolgenden Aussagen

a. Alle Menschen in diesem Hörsaal studieren Mathematik.

b. Eine von meinen Tulpenzwiebeln ist nicht aufgegangen.

c. Alle Schüler dieser Klasse sind in Mathe oder Englisch gut.

17. Bilden Sie die Kontraposition

$$\forall p \in \mathbb{N} : \big(p \text{ ist Primzahl } \Rightarrow p = 2 \text{ oder } p \text{ ungerade}\big)$$