Relationen

Gegeben ist eine Menge M

Zu M bilden wir die Menge aller Paare

$$M \times M = \{(a,b) \mid a \in M, b \in M\}$$

Beispiel: $M = \{1,2,3,4,5,6\}$

$$\begin{aligned} M \times M = \{&(1,1), (2,1), (3,1), \ldots (6,1) \\ &(1,2), (2,2)\ (3,2) \ldots (6,2) \\ &\vdots \\ &(1,6), \ldots \ldots (6,6)\} \end{aligned}$$

Eine Relation auf M ist eine beliebig definierte Teilmenge von $M \times M$.

$$\begin{matrix} (1,1) & (2,1) & \ldots & (6,1) \\ (1\ 2) & & & (\quad) \\ \vdots & & & \\ (1\ 6) & & \ldots & (6,6) \end{matrix}$$

○ → $a = b$

○ → $a < b$

Struktureigenschaften von Relationen

$a \circ b$

1. Symmetrie

   Für alle a, b aus M gilt

   $a \circ b \Longrightarrow b \circ a$

2. Reflexivität

   Für alle a aus M gilt: $a \circ a$

3. Transitivität

Für alle $a, b, c \in M$ gilt:

$a \circ b$ und $b \circ c \Rightarrow a \circ c$

Beispiel „<"

$a < b$ und $b < c \Rightarrow a < c$

Erfüllt eine Relation die drei Eigenschaften Symmetrie, Reflexivität und Transitivität, so ist die Relation eine Äquivalenzrelation.

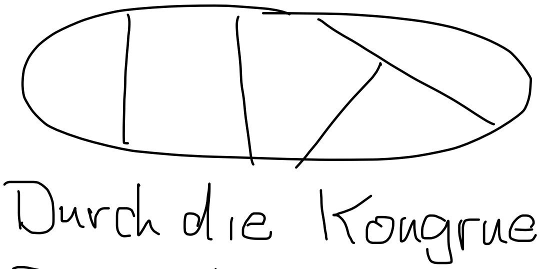
$M_a V_a \quad M_b V_b \quad M_c V_c$

$a \quad b \quad c$

Die Relation „sind Cousin/Cousine" auf der Menge der Menschen ist nicht transitiv.

Die Kongruenz $\equiv$ ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$.

Jede Äquivalenzrelation zerteilt die Grundmenge in Äquivalenzklassen.



M

Durch die Kongruenz $\equiv$ wird $\mathbb{Z}$ in Klassen zerlegt.

mod 5

$\overline{0} = \{\ldots, -10, -5, 0, 5, 10, 15, \ldots\}$

$\overline{1} = \{\ldots, -9, -4, 1, 6, 11, 16, 21, \ldots\}$

$\overline{2} = \{\ldots, -8, -3, 2, 7, 12, \ldots\}$

$\overline{3} = \{\ldots, -7, -2, 3, 8, 13, \ldots\}$

$\overline{4} = \{\ldots, -6, -1, 4, 9, 14, \ldots\}$

Restklassen modulo 5

rechnen mit Restklassen

$+$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$

$\cdot$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{1}$	$\overline{3}$
$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{1}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$
$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$