Kongruenz von Zahlen

Kongruenz (Geometrie) Deckungsgleichheit

Teiler $m = 7$

$30 = 4 \cdot 7 + 2$

$51 = 7 \cdot 7 + 2$

gleich $30 \equiv 51 \mod 7$

30 ist kongruent zu 51 modulo 7

$30 \not\equiv 51 \mod 10$

~~$30 : 7 = 4$ Rest 2~~

~~$26 : 6 = 4$ Rest 2~~

mathem unschön

$30 : 7 \neq 26 : 6$

$4\frac{2}{7} \neq 4\frac{1}{3}$

Definition

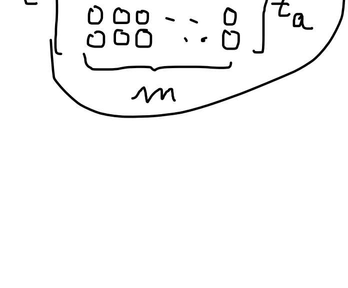
Zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ heißen kongruent modulo m, wenn gilt

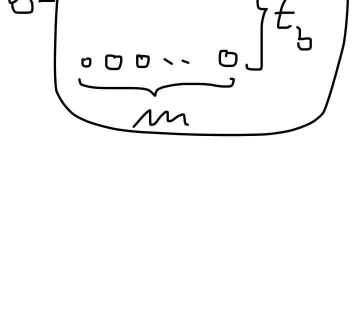
$$a = t_a \cdot m + r_a \qquad 0 \leq r_a \leq m-1$$

$$b = t_b \cdot m + r_b \qquad 0 \leq r_b \leq m-1$$

$$\text{und } r_a = r_b$$

Punktemuster





Satz 1

$a \equiv b \mod m \iff a-b$ ist ohne Rest durch m teilbar

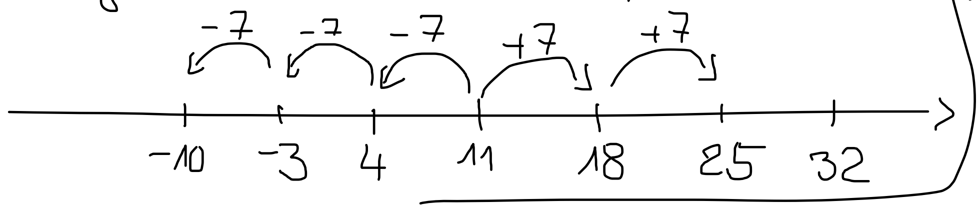
$30 \equiv 51 \mod 7 \qquad 51-30 = 21 = 3\cdot 7$

$21 \equiv x \mod 11 \qquad$ z.B. $x = 21+33 = 54$

$21 = 1\cdot 11 + \underline{10} \qquad 54 = 4\cdot 11 + \underline{10}$

gleich

Kongruente Zahlen mod 7



$-3 = (-1)\cdot 7 + 4$

$-10 = (-2)\cdot 7 + 4$

$17 \equiv x \mod 9$

$-30 \leq x \leq -20 \Rightarrow x = -28$

$17 = 1\cdot 9 + 8$ gleich

$-28 = (-4)\cdot 9 + 8$

$17 - y\cdot 9 \to$ -20 … -30

$17 - 5\cdot 9 = -28$

Satz 2

$a \equiv b \mod m$

$c \equiv d \mod m$

$a \pm c \equiv b \pm d \mod m$ (auch $\cdot$)

Beispiel: $12 \equiv 5 \mod 7$

$10 \equiv -4 \mod 7$

$22 \equiv 1 \mod 7$ ✓

$2 \equiv 9 \mod 7$ ✓

$120 \equiv -20 \mod 7$ ✓

$120 = 17\cdot 7 + 1$ ✓

$-20 = (-3)\cdot 7 + 1$

$20.000 = 229\cdot 87 + 77$

$10 \equiv -3 \mod 13$

$10 \equiv -3 \mod 13$

$100 \equiv (-3)(-3) = 9 \mod 13$

$1000 \equiv -27 \equiv -1 \mod 13$

$1.000.000 \equiv 1 \mod 13$

Satz 3 $\quad \begin{array}{c} a+b\cdot c \equiv d \mod m \\ a \equiv e \mod m \\ \hline e+b\cdot c \equiv d \mod m \end{array}$

In Rechnungen mit $+$, $-$ und $\cdot$ darf man Zahlen durch kongruente Zahlen ersetzen

$5+3\cdot 1001 \equiv x \mod 13$

3008

$1001 \equiv 0 \mod 13$

$5+3\cdot 0 \equiv x \mod 13$

$5 \equiv x \mod 13$

---

57 132 durch 8 teilbar?

$2+3\cdot 2+1\cdot 4=12$

$\Leftrightarrow$ 132 " "

$132=1\cdot 100+3\cdot 10+2\cdot 1 \equiv x \mod 8$

$10 \equiv 2 \mod 8$

$100 \equiv 4 \mod 8$

$1\cdot 4+3\cdot 2+2\cdot 1 \equiv x \mod 8$