Vollständige Induktion

Für alle natürlichen Zahlen n gilt $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$

Beweis durch vollst. Induktion

Induktionsanfang

n=1: linke S: $\sum_{k=1}^{1}(2k-1) = 1$ ☺

rechte S: $1^2 = 1$ stimmt freu!

Induktionsvoraussetzung

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$$

Induktionsbehauptung

$$\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) = (n+1)^2$$

Beweis

$$\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) = \sum_{k=1}^{n}(2k-1) + 2(n+1)-1$$

$$\underset{k=1}{O} + \underset{k=2}{O} + O + \cdots + \underset{k=n-1}{O} + \underset{k=n}{O} + \underset{k=n+1}{O}$$

Ind. vorauss.

Ind vorauss

$$= n^2 + 2(n+1) - 1$$

$$= n^2 + 2n + 2 - 1$$

$$= n^2 + 2n + 1 \qquad = a^2 + 2ab + b^2 \quad (a+b)^2$$

$$= (n+1)^2 \qquad \square$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \, , \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \, , \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{4+2+1}{8} = \frac{7}{8}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{7}{8} + \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \quad . \quad . \quad + \frac{1}{64} = \frac{63}{64}$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}} = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \quad + \frac{1}{2^n} = \boxed{\frac{2^n - 1}{2^n}}$$

Induktionsanf

$n=1$ linke S. $\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2}$

rechte S $\frac{2^1 - 1}{2^1} = \frac{1}{2}$