Dr. R. Albers   Mathem. Denken u. Lehren 1   WiSe 14/15

11. Übung   Lösungen

PRÄSENZÜBUNG

1. Beispiele: $1234_{16} = 4660_{10} = 33324_6$

$1B34_{13} = 4099_{10} = 112344_5$

2. $\underbrace{10}\underbrace{11}\underbrace{01}\underbrace{00}\underbrace{10}_2$ paarweise umwandeln, da $4 = 2^2$

$2\;3\;1\;0\;2_4$

$\underbrace{1}\underbrace{011}\underbrace{010}\underbrace{010}$ in Dreiergruppen umwandeln, da $8 = 2^3$

$1\;3\;2\;2_8$

765_8 ziffernweise umwandeln

$7_8 = 111_2 \quad 6_8 = 110_2 \quad 5_8 = 101_2$

und zusammensetzen

$765_8 = 111\,110\,101_2$

3. a. $\varphi^5 = 5\varphi - 3 \qquad \varphi^5 \approx 0{,}618^5 \approx 0{,}090145$

$5\varphi - 3 \approx 5 \cdot 0{,}618 - 3 = 0{,}090000$

b.
$$\begin{aligned}
\varphi^5 = \varphi^2 \cdot \varphi^2 \cdot \varphi &= (1-\varphi)\cdot(1-\varphi)\cdot\varphi \\
&= \varphi - 2\varphi^2 + \varphi^3 \\
&= \varphi - 2(1-\varphi) + (1-\varphi)\varphi \\
&= \varphi - 2 + 2\varphi + \varphi - \varphi^2 \\
&= 4\varphi - 2 - (1-\varphi) \\
&= 5\varphi - 3 \quad \square
\end{aligned}$$

3c. $5\varphi - 3 = 5\,\frac{\sqrt{5}-1}{2} - 3$

$= \frac{5}{2}(\sqrt{5}-1) - 3 = \frac{5}{2}\sqrt{5} - \frac{5}{2} - \frac{6}{2}$

$= \frac{5}{2}\sqrt{5} - \frac{11}{2} = \frac{5\sqrt{5}-11}{2}$

Näherung $\sqrt{5} \approx 2{,}236$

$5\sqrt{5} - 11 \approx 5 \cdot 2{,}236 - 11 = 0{,}18$

halbieren $\rightarrow$ 0,09

Das stimmt gut mit den Zahlen aus a. überein.

HAUSÜBUNGEN

A4	A5	A6	A7	Σ
9	6	5	5	25

4a $5^2 = 25$, $5^3 = 125$, $5^4 = 625$.

$2015 = 3 \cdot 625 + 140$

$= 3 \cdot 625 + 1 \cdot 125 + 15$

$= 3 \cdot 5^4 + 1 \cdot 5^3 + 0 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5^1 + 0 \cdot 5^0$

$= 31030_5$

b. $2015 = 223 \cdot 9 + 8$ $\quad 2015_{10} = 2678_9$

$223 = 24 \cdot 9 + 7$

$24 = 2 \cdot 9 + 6$

$2 = 0 \cdot 9 + 2$

c. $2015_8 = 5 \cdot 1 + 1 \cdot 8 + 2 \cdot 8^3$

$= 5 + 8 + 1024 = 1037$

d. $2015_{12} = 2 \xrightarrow{\cdot 12} 24 + 0 = 24 \xrightarrow{\cdot 12} 288$

$\xrightarrow{+1} 289 \xrightarrow{\cdot 12} 3468 \xrightarrow{+5} 3473$

für jede Teilaufgabe 1,5

e. $2015_9 = 1472_{10} = 2000112_3$

f. $100011011_2 = 283_{10} = 10123_4$ 9

5a. $53_7 = 5 \cdot 7 + 3 = 38$

$530_7 = 5 \cdot 7^2 + 3 \cdot 7 = 266$

$266 : 38 = 7$

530_7 ist das ~~7~~-Fache von 53_7 1,5

b. $4A_{12} = 4 \cdot 12 + 10 = 58$

$4A0_{12} = 4 \cdot 12^2 + 10 \cdot 12 = 696$

$696 : 58 = 12$

$4A0_{12}$ ist das 12-Fache von $4A_{12}$. 1,5

c. In a. und b. wurde jeweils mit der Basiszahl multipliziert

Allgemein: Hängt man an eine Zahl im b-System eine Null, so wird die Zahl mit b multipliziert 1

Stellenwerttafel

...	b^4	b^3	b^2	b	$b^0=1$
	z_4	z_3	z_2	z_1	z_0
z_4	z_3	z_2	z_1	z_0	0

Durch die Null am Ende wird jede Ziffer um eine Stelle nach links geschoben. Dadurch steigt der Wert der Ziffer um den Faktor b.

Da das gleichmäßig für alle Ziffern gilt, wirkt sich der Faktor b auf die ganze Zahl aus.

Erläuterung 1

algebraisch

$a = z_n b^n + \dots + z_3 b^3 + z_2 b^2 + z_1 b + z_0$

Null anhängen, jede Ziffer eine Stelle nach links.

$z_n b^{n+1} + \dots + z_3 b^4 + z_2 b^3 + z_1 b^2 + z_0 b + 0$

nun kann man b ausklammern

$= \underbrace{(z_n b^n + \dots + z_3 b^3 + z_2 b^2 + z_1 b + z_0)}_{a} \cdot b + 0$

$= a \cdot b + 0 = a \cdot b$

d. $12_3 = 3 + 2 = 5$ $\quad 1200_3 = 1 \cdot 27 + 2 \cdot 9 = 45$

$45 : 5 = 9 = 3^2$

Wenn das Anhängen einer Null eine Multiplikation mit b bedeutet, dann bewirken zwei Nullen eine Multiplikation mit b^2.

Zehnersystem: zwei Nullen anhängen

$\leftrightarrow$ Multiplikation mit 100

(1)

6. a

10er	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
6er	13	30	43	100	113	130	143	200	213	230

(2)

b. $54_{10} = 130_6$ $\quad$ 130 hat die Quersumme

$1 + 3 + 0 = 4$ (Das ist unabhängig vom Basissystem)

4 ist nicht durch 9 teilbar, $130_6 = 54_{10}$ ist aber durch 9 teilbar. Damit haben wir ein Gegenbeispiel für eine (vermutete) Quersummenregel.

(1,5)

c. Eine Zahl, im Sechsersystem geschrieben, ist durch $9_{10} = 13_6$ teilbar, wenn die Zahl aus den letzten beiden Ziffern durch $9_{10} = 13_6$ teilbar ist. Diese kann man auch konkret aufzählen: ...00, ...13, ...30, oder ...43. (1,5)

5 a. Es ist kein Archimedischer Körper, da nicht alle Ecken gleichartig sind. (z.T. 3 4 5 4, z.T. 3 5 3 5) (1)

b. Flächen:

oben: 1 Fünfeck

oberer Rand: 5 Vierecke, 5 Dreiecke

unteres Band: 10 Dreiecke, 5 Fünfecke

unten: 1 Fünfeck

<u>insgesamt: 15 Dreiecke, 5 Vierecke, 7 Fünfecke</u> (1)

Ecken:

1. Zählweise am Körper

oben: 5 Ecken

oberer Ring: 10 Ecken

unterer Ring: 5 Ecken (3 5 3 5)

unten: 5 Ecken

<u>Zusammen: 25 Ecken</u>

2. Zählweise über die Flächen

in jeder Körperecke stoßen 4 Flächenecken

zusammen

15 Dreiecke → 45 Flächenecken
5 Vierecke → 20 "
7 Fünfecke → 35 "

100 Flächenecken

⇒ 25 (Körper)Ecken ①

Kanten

Zählung wie üblich über die Flächen

Zwei Flächenkanten bilden stets ~~die~~ eine Körperkante

15 Dreiecke → 45 Flächenkanten
5 Vierecke → 20 "
7 Fünfecke → 35 "

100 Flächenkanten

⇒ 50 (Körper)kanten ①

Zusammenfassung, Eulerscher Polyedersatz

$F = 15 + 5 + 7 = 27 \quad E = 25 \quad K = 50$

$F + E - K = 2$ ist erfüllt ①