Übung 10 (freiwillige Übung)
Lösung

Aufgabe 2
Über die Summen aufeinander folgender ganzer Zahlen (Safgaz) haben wir in der Vorlesung folgende Regeln erarbeitet:

Die Summe von u, u ungerade, aufeinander folgender ganzer Zahlen ist durch u teilbar.
Die Summe von g, g gerade, aufeinander folgender ganzer Zahlen lässt beim Teilen durch g den Rest $\frac{g}{2}$.
Aus diesen Regeln kann man nun jeweils eine Strategie ableiten, mit der man zu einer gegebenen Zahl die Darstellung als Safgaz ermittelt.

Die Primfaktorzerlegung von 2015 ist $2015 = 5 \cdot 13 \cdot 31$.
Dann ist die vollständige Zerlegung in Produktpaare
$2015 = 1 \cdot 2015 = 5 \cdot 403 = 13 \cdot 155 = 31 \cdot 65$.
2015 hat also nur ungerade Teiler.

Jeder ungerade Teiler u (außer der 1) führt auf eine Safgaz mit einer ungeraden Anzahl u von Summanden. Die ermittelt man folgendermaßen:
$2015 : u = m$ Das ist die mittlere Zahl der Summe. Von dort geht man $\frac{u-1}{2}$ Zahlen nach „unten“ und „oben“.

Das ist der Größe nach:
5: 2015 : 5 = 403, (5-1):2 = 2
Also laufen die Summanden von 403 – 2 =401 bis 403 + 2 =405,
also $\sum_{k=401}^{405} k = 401+402+403+404+405 = 2015$
13: 2015 : 13 = 155, (13-1):2 = 6
Also laufen die Summanden von 155 – 6 =149 bis 155 + 6 = 161,
also $\sum_{k=149}^{161} k = 149+150+151+...+160+161 = 2015$
31: 2015 : 31 =65, (31-1):2 = 15
Also laufen die Summanden von 65 – 15 = 50 bis 65 + 15 = 80
also $\sum_{k=50}^{80} k = 50+51+52+...+79+80 = 2015$
65: 2015 : 65 =31, (65-1):2 = 32
Also laufen die Summanden von 31 – 32 = -1 bis 31 + 32 = 63
also $\sum_{k=-1}^{63} k = -1+0+1+2+3+...+62+63 = 2015$
Dieses ist eine Lösung, die mit negativen ganzen Zahlen arbeitet.
155: 2015 : 155 =13, (155-1):2 = 77
Also laufen die Summanden von 13 – 77 = -64 bis 13 + 77 = 90
also $\sum_{k=-64}^{90} k = -64-63-62-+...+89+90 = 2015$
Dieses ist eine Lösung, die mit negativen ganzen Zahlen arbeitet.

403: 2015 : 403 =5, (403-1):2 = 201
Also laufen die Summanden von 5 – 201 = –196 bis 5 + 201 = 206

also $\sum_{k=-196}^{206} k = -196-195-194-+\ldots+205+206 = 2015$

Dieses ist eine Lösung, die mit negativen ganzen Zahlen arbeitet.
2015: 2015 : 2015=1, (2015-1):2 = 1007
Also laufen die Summanden von 1 – 1007 = -1006 bis 1 + 1007 = 1008

also $\sum_{k=-1006}^{1008} k = -1006-1005-1004-+\ldots+1007+1008 = 2015$

Dieses ist eine Lösung, die mit negativen ganzen Zahlen arbeitet.

Jeder ungerade Teiler von 2015, der ungeradzahlig oft vorkommt, führt auch zu einer Lösung mit einer geraden Anzahl von Summanden.
Die Regelmäßigkeit für eine Safgaz mit einer geraden Anzahl g von Summanden war:
Die Summe von g, g gerade, aufeinander folgender ganzer Zahlen lässt beim Teilen durch g den Rest $\frac{g}{2}$.
Dazu gehen wir folgendermaßen vor: (Beispiel 13·155)
<u>2015</u> = 13·155 = 13·(154 + 1) = 13·154 + 13 <u>= 26·77 + 13</u>
Im letzten Schritt wurde die 13 verdoppelt und zum Ausgleich die 154 halbiert.
Damit haben wir zur 13 die 26 als gerade Zahl g gefunden, bei der 2015 : g einen Rest von $\frac{g}{2}$ lässt.
Da 2015 nur ungerade Teiler hat, kommt auch jeder Teiler ungeradzahlig oft vor, erfüllt also die obige Bedingung. Damit kann man zu jedem Teiler von 2015 eine Safgaz mit einer geraden Anzahl von Summanden konstruieren. Dazu gehen wir folgendermaßen vor:
Zum Teiler t ist $g = 2t$. Dann ist 2015 : g = m, wobei m keine ganze Zahl ist, sondern auf ...,5 endet. Rundet man m ab und subtrahiert $\frac{g}{2}-1$, so erhält man den „unteren" (Start-) Summanden, rundet man m auf und addiert $\frac{g}{2}-1$, so erhält man den letzten Summanden der Safgaz.
Wir gehen wieder die Teiler der Größe nach durch.

Teiler 1, also 2 · 1 = **2** als Anzahl der Summanden, 2:2–1=0
2015:2 = 1007,5 , die Summanden laufen von 1007 – 0 = 1007 bis 1008 + 0 = 1008
$1007+1008=2015$ (Das ist die bekannte Zerlegung einer ungeraden Zahl in die Summe zweier aufeinander folgender Zahlen.)
Teiler 5, also 2 · 5 = **10** als Anzahl der Summanden, 10:2–1=4
2015:10 = 201,5 , die Summanden laufen von 201 – 4 = 197 bis 202 + 4 = 206

$\sum_{k=197}^{206} k = 197+198+199+\ldots+205+206 = 2015$

Teiler 13, also 2 · 13 = **26** als Anzahl der Summanden, 26:2–1=12
2015:26 = 77,5 , die Summanden laufen von 77 – 12 = 65 bis 78 + 12 = 90

$\sum_{k=65}^{90} k = 65+66+67+\ldots+89+90 = 2015$

Teiler 31, also 2 · 31 = **62** als Anzahl der Summanden, 62:2–1=30
2015:62 = 32,5 , die Summanden laufen von 32 – 30 = 2 bis 33 + 30 = 63

$$\sum_{k=2}^{63} k = 2+3+4+...+62+63 = 2015$$

Teiler 65, also 2 · 65 = **130** als Anzahl der Summanden, 130:2–1 = 64
2015:130 = 15,5 , die Summanden laufen von 15 – 64 = -49 bis 16 + 64 = 80

$$\sum_{k=-49}^{80} k = -49-48-47-+...+79+80 = 2015$$

Dieses ist eine Lösung, die mit negativen ganzen Zahlen arbeitet.
Teiler 155, also 2 · 155 = **310** als Anzahl der Summanden, 310:2–1 = 154
2015:310 = 6,5 , die Summanden laufen von 6 – 154 = -148 bis 7 + 154 = 161

$$\sum_{k=-148}^{161} k = -148-147-146-+...+160+161 = 2015$$

Dieses ist eine Lösung, die mit negativen ganzen Zahlen arbeitet.
Teiler 403, also 2 · 403 = **806** als Anzahl der Summanden, 806:2–1 = 402
2015:806 = 2,5 , die Summanden laufen von 2 – 402 = -400 bis 3 + 402 = 405

$$\sum_{k=-400}^{405} k = -400-399-398-+...+404+405 = 2015$$

Dieses ist eine Lösung, die mit negativen ganzen Zahlen arbeitet.
Teiler 2015, also 2 · 2015 = **4030** als Anzahl der Summanden, 4030:2–1 = 2014
2015:4030 = 0,5 , die Summanden laufen von 0 – 2014 = -2014 bis 1 + 2014 = 2015

$$\sum_{k=-2014}^{2015} k = -2014-2013-2012-+...+2014+2015 = 2015$$

Dieses ist eine Lösung, die mit negativen ganzen Zahlen arbeitet.

Da man systematisch alle Teiler von 2014 durchgegangen ist, sind das alle möglichen Lösungen.

Ergänzende Betrachtung zu den gefundenen Lösungen

Vergleicht man die Lösungen, so fällt einem auf, dass immer zwei zusammengehören.
Die Verbindung ist immer über den größten Summanden in der Safgaz.

$$\sum_{k=401}^{405} k = 401+402+403+404+405 = 2015 \text{ 5 Summanden}$$

$$\sum_{k=-400}^{405} k = -400-399-398-+...+404+405 = 2015 \text{ 806 Summanden}$$

$$\sum_{k=149}^{161} k = 149+150+151+...+160+161 = 2015 \text{ 13 Summanden}$$

$$\sum_{k=-148}^{161} k = -148-147-146-+...+160+161 = 2015 \text{ 310 Summanden}$$

$$\sum_{k=50}^{80} k = 50+51+52+...+79+80 = 2015 \text{ 31 Summanden}$$

$$\sum_{k=-49}^{80} k = -49-48-47-+...+79+80 = 2015 \text{ 130 Summanden}$$

$$\sum_{k=-1}^{63} k = -1+0+1+2+3+...+62+63 = 2015 \text{ 65 Summanden}$$
$$\sum_{k=2}^{63} k = 2+3+4+...+62+63 = 2015 \text{ 62 Summanden}$$

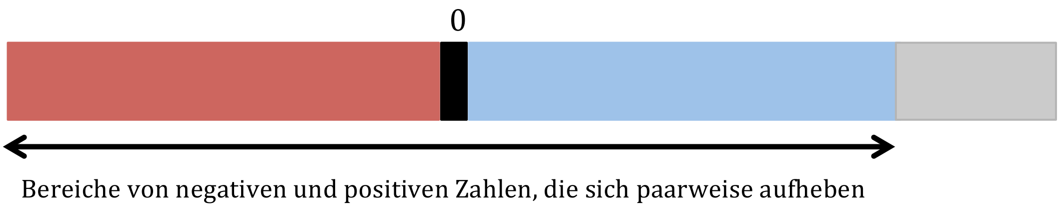
$$\sum_{k=-64}^{90} k = -64-63-62-+...+89+90 = 2015 \text{ 155 Summanden}$$
$$\sum_{k=65}^{90} k = 65+66+67+...+89+90 = 2015 \text{ 26 Summanden}$$

$$\sum_{k=-196}^{206} k = -196-195-194-+...+205+206 = 2015 \text{ 403 Summanden}$$
$$\sum_{k=197}^{206} k = 197+198+199+...+205+206 = 2015 \text{ 10 Summanden}$$

$$\sum_{k=-1006}^{1008} k = -1006-1005-1004-+...+1007+1008 = 2015 \text{ 2015 Summanden}$$
$$1007+1008 = 2015 \text{ 2 Summanden}$$

Die Erklärung für den Zusammenhang ist recht naheliegen. Bei allen Safgaz, die im Negativen starten, gibt es zu jedem negativen Summanden einen betragsgleichen positiven Summanden. Also gibt es zur Folge aller negativen Summanden einen entsprechenden Abschnitt in den Summanden, der sich dazu summandenweise aufhebt. Übrig bleibt dann ein Abschnitt aus nur positiven Summanden, der für sich in der Summe gerade 2015 ergibt.

grafisch:



Der Bereich der negativen und positiven Zahlen, die sich paarweise aufheben, bildet mit der eingeschlossenen Null eine ungerade Anzahl von Summanden, so dass der verbleibende Rest der Summanden die Eigenschaft un/gerade wechselt gegenüber der Safgaz, die mit negativen Zahlen beginnt.

Damit kann man auch erklären, warum die Lösung $\sum_{k=-2014}^{2015} k = -2014-2013-2012-+...+2014+2015 = 2015$ keine Partnerlösung hat. Denn „klappt" man den negativen Bereich über den entsprechenden, positiven, bleibt als einziger positiver Summand 2015 übrig, was aber keine Safgaz ist.