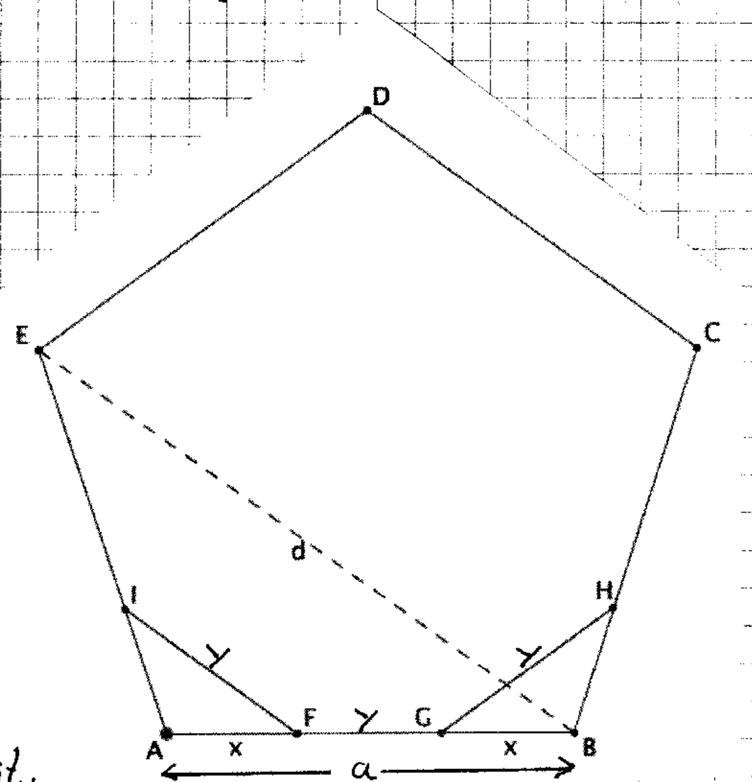
Dr. R. Albers Mathem. Denken u. Lehren 1 WiSe 14/15

9. Übung, Lösungen

1. Die Länge der Schnitt-Kanten ist y.

<u>Regelmäßiges</u> 10-Eck heißt, dass auch der Rest der 5-Eck-Kante $\overline{FG}$ die Länge y hat.



Dann gilt

$$x + y + x = a$$

und $\dfrac{y}{x} = \dfrac{d}{a}$ (Ähnlichkeit, Strahlensätze)

$$= \phi \quad \text{goldene Verlängerung}$$

Also $y = \phi x$. Einsetzen $x + \phi x + x = a$

$$x\,(2 + \phi) = a$$

$$x = \frac{1}{2+\phi}\, a$$

$$\frac{1}{2+\phi} = \frac{1}{2 + \frac{\sqrt{5}+1}{2}} = \frac{2}{4 + \sqrt{5} + 1} = \frac{2}{5+\sqrt{5}} \cdot \frac{5-\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}$$

$$= \frac{2}{25-5}\,(5-\sqrt{5}) = \frac{5-\sqrt{5}}{10} \approx 0{,}2764$$

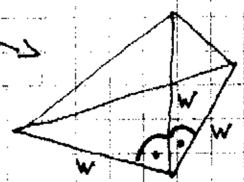
Der Schnitt muss also gut ein Viertel der alten 5-Eck-Kante auf beiden Seiten abschneiden.

2. a) Alle Kanten des Tetraeders sind Diagonalen von Quadraten (Seitenflächen) des Würfels. Also sind sie alle gleich lang. 1

b) Also gilt $t = \sqrt{2}\, w$ 1

c) Der Würfel hat 8 Ecken. 4 davon sind Ecken des Tetraeders. Bei den übrigen 4 Ecken liegen die Lücken. 1

d) Die Lücke vorn rechts ist →



Die Grundfläche ist ein halbes Quadrat: $G = \frac{1}{2} w^2$

Die Höhe ist eine Quadratkante: $h = w$

Also $V_1 = \frac{1}{3} G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} w^2 \cdot w = \frac{1}{6} w^3$ 2

e) Das Volumen des Tetraeders ist das Volumen des Würfels minus das Gesamtvolumen der Lücken

$V_T = V_W - V_L = w^3 - 4 \cdot \frac{1}{6} w^3 = \frac{1}{3} w^3$ 1

f) Der Tetraeder füllt den Würfel zu einem Drittel aus. Aber w ist nicht die Tetraederkante t.

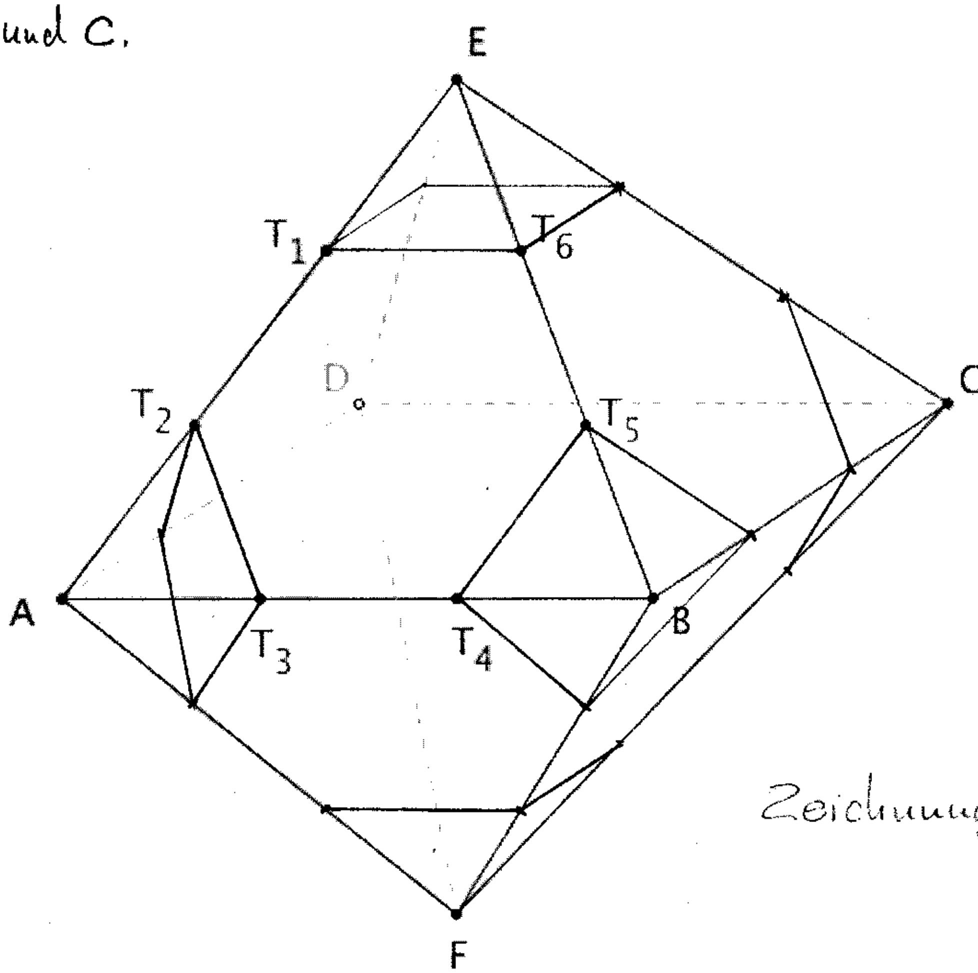
$t = \sqrt{2}\, w \Rightarrow w = \frac{1}{\sqrt{2}} t \Rightarrow w^3 = \frac{1}{2\sqrt{2}} t^3 = \frac{1}{4}\sqrt{2}\, t^3$

$V_T = \frac{1}{3} w^3 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}\sqrt{2}\, t^3 = \frac{1}{12}\sqrt{2}\, t^3$ 2

wie in den Formelsammlungen

3.

a. und c.



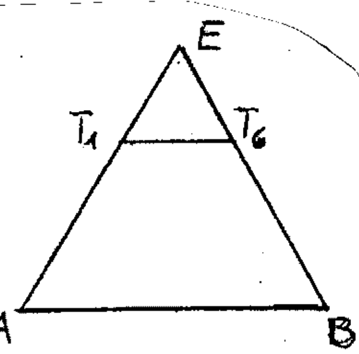
Zeichnung (3)

b. Das Dreieck ABE ist gleichseitig.
Also sind alle Drittel der drei Seiten auch gleich lang. Insbesondere gilt $|ET_1| = |ET_6|$. Zusammen mit dem 60°-Winkel bei E folgt, dass auch $T_1 T_6 E$ ein gleichseitiges Dreieck ist. Also gilt $|T_1T_6| = |T_1E|$ und damit auch $= |T_1T_2|$. Analog folgt, dass alle Seiten ~~gl~~ des Sechsecks $T_1T_2 \dots T_6$ gleich lang sind. (2)

Die Innenwinkel des Sechsecks sind alle Nebenwinkel von 60°-Winkeln der kleinen gleichseitigen Dreiecke, also alle 120°. (1)

d. Ist $|AB|=1$, dann ist die Kante des Dreiecks T_1T_6E $\frac{1}{3}$, also $A_t = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^2\sqrt{3}$

$$= \frac{1}{9}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}$$



Die Fläche des großen Dreiecks ABE ist $A_G = \frac{\sqrt{3}}{4}$. Dann ist eine Sechseckfläche $A_S = A_G - 3\cdot A_t = \frac{1}{4}\sqrt{3} - \frac{3}{9}\cdot\frac{1}{4}\sqrt{3}$

$$= \frac{2}{3}\,\frac{1}{4}\sqrt{3}$$

Der Körper hat 8 Sechsecke. 1

Jedes Quadrat hat eine Kantenlänge von $\frac{1}{3}$, also $A_Q = \frac{1}{9}$. Der Körper hat 6 Quadrate.

$$A = 8\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}\sqrt{3} + 6\cdot\frac{1}{9} = \frac{4}{3}\sqrt{3} + \frac{2}{3} = \frac{2}{3}\left(2\sqrt{3}+1\right)$$

$$\approx 2{,}98$$

1

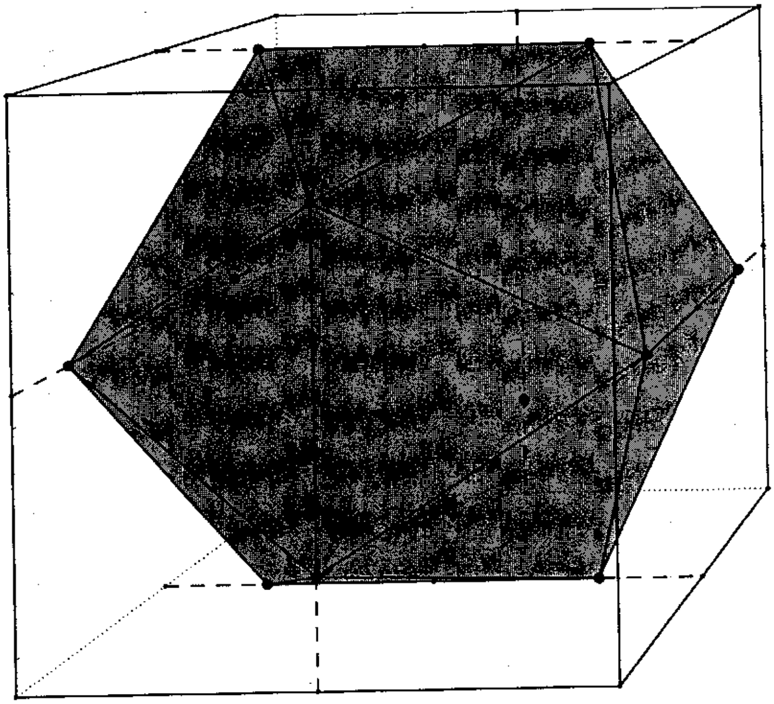
Die Oberfläche ist also knapp 3 Flächeneinheiten.

4. Konstruktionsbeschreibung

Auf allen Mittellinien wird der Abstand Mittelpunkt – Kante gemessen, der Major berechnet und der betreffende Punkt eingezeichnet.

Dann werden die sichtbaren Dreiecke gezeichnet und eingefärbt.

Drei Punkte sind verdeckt (beide Punkte a.d. Rückwand, linke Seitenwand hinten), die Dreiecke zu diesen Eckpunkten sind ebenso verdeckt.



5a. 1. Lösung

Es gibt zwei Sorten Dreiecke:

i) Dreiecke, die genau an einer Fünfeckkante liegen.

12 Fünfecke ⇒ 60 Fünfeckkanten

⇒ 60 Dreiecke der Sorte i)

ii) Dreiecke, die zwischen Ecken von drei Fünfecken liegen

12 Fünfecke ⇒ 60 Ecken

60 : 3 = 20 Dreiecke der Sorte ii)

Also gibt es 60 + 20 = 80 Dreiecke

2

2. Lösung: Um jedes Fünfeck gibt es einen Kranz aus 15 Dreiecken. Davon werden 10 doppelt gezählt: $10 \cdot 12 : 2 = 60$ und 5 dreifach $5 \cdot 12 : 3 = 20$

Also gibt es $60 + 20 = \underline{\underline{80 \text{ Dreiecke}}}$

b. Jede Körperecke enthält genau eine Fünfeckecke. $\underline{\underline{E}} = 12 \cdot 5 = \underline{\underline{60}}$ (1)

Die Vielecke haben $12 \cdot 5 + 80 \cdot 3 = 300$ (Flächen-)kanten. Immer 2 Flächenkanten bilden eine Körperkante. $\underline{\underline{k = 150}}$ (1)

c. 80 Dreiecke, 12 Fünfecke

$F = 80 + 12 = 92$ $\quad$ $k = 150$

$E = \quad 60$

$E + F = 152$ $\quad$ $k + 2 = 152$

stimmt ☺ (1)

A2	A3	A4	A5	Σ
8	8	4	5	25