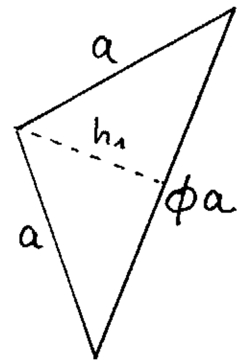
Dr. Reimund Albers   Mathematisches Denken u. Lehren 1   WiSe 14/15

7. Übung, Lösungen

PRÄSENZÜBUNGEN

1. Linkes Teildreieck ADE



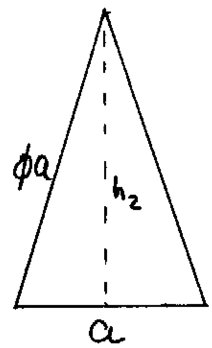
$$h_1^2 + \left(\tfrac{1}{2}\phi a\right)^2 = a^2$$

$$h_1^2 = a^2 - \tfrac{1}{4}\phi^2 a^2 = a^2\left(1-\tfrac{1}{4}\phi^2\right)$$

$$A_1 = \tfrac{1}{2}\phi a \cdot a\sqrt{1-\tfrac{1}{4}\phi^2}$$

$$= \tfrac{1}{2}a^2\,\phi\sqrt{1-\tfrac{1}{4}\phi^2}$$

2. mittleres Teildreieck



$$h_2^2 + \left(\tfrac{1}{2}a\right)^2 = (\phi a)^2$$

$$h_2^2 = \phi^2 a^2 - \tfrac{1}{4}a^2 = a^2\left(\phi^2 - \tfrac{1}{4}\right)$$

$$A_2 = \tfrac{1}{2}\,a a\sqrt{\phi^2-\tfrac{1}{4}} = \tfrac{1}{2}a^2\sqrt{\phi^2-\tfrac{1}{4}}$$

$$A = 2A_1 + A_2 = a^2\phi\sqrt{1-\tfrac{1}{4}\phi^2} + \tfrac{1}{2}a^2\sqrt{\phi^2-\tfrac{1}{4}} \quad (*)$$

$$\phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \qquad \phi^2 = \phi + 1 = \frac{\sqrt{5}+3}{2}$$

$$\phi\sqrt{1-\tfrac{1}{4}\phi^2} = \sqrt{\phi^2\left(1-\tfrac{1}{4}\phi^2\right)}$$

$$= \sqrt{\tfrac{1}{2}(\sqrt{5}+3)\left(1-\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{1}{2}(\sqrt{5}+3)\right)}$$

$$= \sqrt{\tfrac{1}{2}(\sqrt{5}+3)\cdot\tfrac{1}{8}(5-\sqrt{5})}$$

$$= \sqrt{\tfrac{1}{16}\left(5\sqrt{5}-5+15-3\sqrt{5}\right)} = \tfrac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$$

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{\phi^2-\tfrac{1}{4}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}(\sqrt{5}+3)-\tfrac{1}{4}}$$

$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{4}\left(2\sqrt{5}+6-1\right)} = \tfrac{1}{4}\sqrt{5+2\sqrt{5}}$$

Einsetzen in $(*)$ ergibt

$$A = a^2\,\tfrac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}} + a^2\,\tfrac{1}{4}\sqrt{5+2\sqrt{5}}$$

$$= \tfrac{1}{4}a^2\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}} + \sqrt{5+2\sqrt{5}}\right)$$

HAUSÜBUNGEN

2 a. $\frac{1}{4} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2} \quad \Big| -\frac{1}{4}$

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{4} \qquad 1$$

b. $\frac{1}{c} = \frac{1}{4} - \frac{1}{b} = \frac{b-4}{4b}$

$$c = \frac{4b}{b-4} \qquad 1$$

Es ist eigentlich egal, nach welcher Variablen man auflöst. Beide Variablen spielen die gleiche Rolle. 1

c. Polynomdivision

$$4b : (b-4) = 4 + \frac{16}{b-4}$$
$$-(4b-16)$$
$$+16 \quad \text{(Rest)}$$

Trick: $\frac{4b}{b-4} = \frac{4b-16+16}{b-4} = \frac{4(b-4)+16}{b-4}$

$$= 4 + \frac{16}{b-4} \qquad 1$$

d. Damit $c = 4 + \frac{16}{b-4}$ eine ~~ga~~ natürliche Zahl ≥ 3 ist, muss $b-4$ ein Teiler von 16 sein. 1

Teiler von 16	Ansatz für b	Ergebnis b	Ergebnis c
1	$b-4=1$	5	$4+\frac{16}{1}=20$
2	$b-4=2$	6	$4+\frac{16}{2}=12$
4	$b-4=4$	8	$4+\frac{16}{4}=8$
8	$b-4=8$	12	$4+\frac{16}{8}=6$
16	$b-4=16$	20	$4+\frac{16}{16}=5$

symmetrisch
b und c vertauscht

2

e. Die gefundenen Lösungen für (a, b, c) sind:

$4, 5, 20$ Probe: $\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{20} = \frac{5+4+1}{20} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$ ✓

$4, 6, 12$ Probe: $\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12} = \frac{3+2+1}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ ✓

$4, 8, 8$ Probe: $\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8} = \frac{2}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ ✓ 2

Prinzipiell muss man in d. auch die negativen Teiler von 16 betrachten, also $-1, -2, -4, -8$ und -16. Aber in keinem dieser Fälle ergibt sich eine Lösung mit $b \geq 3$ und $c \geq 3$. Da damit alle Teiler von 16 betrachtet sind, hat man alle Lösungsmöglichkeiten untersucht. 1

3. a. $\alpha = \frac{360°}{9} = \underline{\underline{40°}}$ 1

b. Im Viereck MJGK gilt

$\alpha + 90° + \beta + 90° = \cancel{180}\ 360°$

↑ Scheitelwinkel zum Winkel aus a.

$\beta = 360° - 180° - 40°$

$\underline{\underline{\beta = 140°}}$ 1

c. γ liegt im Trapez ABCI, das symmetrisch ist. Also gilt $2\beta + 2\gamma = 360°$

$2\gamma = 360° - 2 \cdot 140° = 80°$

$\underline{\underline{\gamma = 40°}}$ 1 noch 3 d. Im Viereck ICKH gilt:

Winkel bei I: $140° - \gamma = 100°$

" " K: $90°$

" " H: $140°$

$$100° + \delta + 90° + 140° = 360°$$

$$\delta = 360° - 330°$$

$$\underline{\underline{\delta = 30°}}$$

1

4. Die vier Innenwinkel müssen zusammen 360° ergeben

$$180°\left(1-\frac{2}{a}\right) + 180°\left(1-\frac{2}{b}\right) + 180°\left(1-\frac{2}{c}\right) + 180°\left(1-\frac{2}{d}\right) = 360°$$

$$1-\frac{2}{a} + 1-\frac{2}{b} + 1-\frac{2}{c} + 1-\frac{2}{d} = 2 \quad |-4$$

$$-\frac{2}{a} - \frac{2}{b} - \frac{2}{c} - \frac{2}{d} = -2 \quad |:(-2)$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = 1$$

2

5. a) Kantenpaare

1 – 3   2 – 4   5 – 8   6 – 9   7 – 10

b) gegenüberliegende Flächen

A – H   B – E   C – F   D – G

je Fehler -0,5   3

A2	A3	A4	A5	Σ
10	4	2	3	19