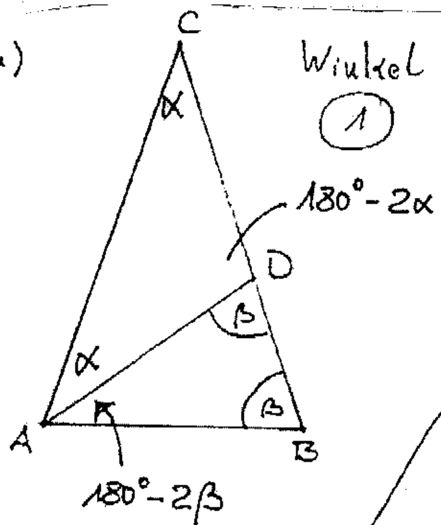
Dr. Reimund Albers Mathematisches Denken u. Lehren 1 WiSe 14/15

6. Übung, Lösungen

1. a)



Winkel ①

Die beiden Winkel bei D ergänzen sich zu 180°:

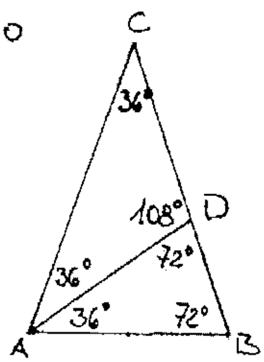
$$(180° - 2\alpha) + \beta = 180°$$
$$-2\alpha + \beta = 0$$
$$\beta = 2\alpha$$

Da ΔABC gleichschenklig, gilt

$$\alpha + (180° - 2\beta) = \beta$$
$$\alpha + 180° = 3\beta$$
$$\alpha + 180° = 6\alpha$$
$$5\alpha = 180°$$
$$\alpha = 36°$$

$$\beta = 2\alpha = 72°$$

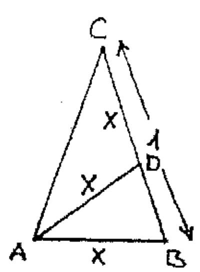
also



b) ΔABC und ΔABD. Bei beiden sind die beiden Winkel an der Basis 72°, in der Spitze 36°. Entsprechende Winkel sind gleich groß
$\Rightarrow$ beide Dreiecke sind ähnlich.

$$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|BD|}{|AB|}$$

c)



In beiden Dreiecken:

$\frac{\text{Basis}}{\text{Schenkel}}$ | $\frac{x}{1} = \frac{1-x}{x}$

$$x^2 = 1 - x$$

$$x^2 + x - 1 = 0$$

$$x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 1}$$

sinnvolle geom. Lösung ist $x = \varphi$

HAUSÜBUNGEN

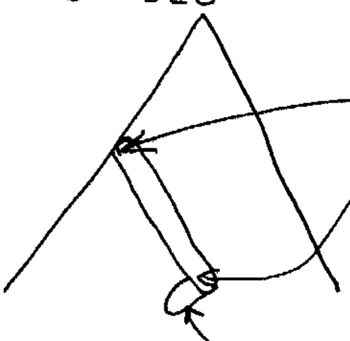
2. $\dfrac{25\cancel{0} \cdot \overset{83}{\cancel{249}} \cdot \overset{62}{\cancel{248}} \cdot 247 \cdot 246}{1 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{5}}$ Zuerst $5!$ in den Nenner schreiben

Dann in den Zähler von 250 beginnend absteigend schreiben, bis auch dort 5 Zahlen stehen.
Nun kürzen. Der Nenner muss sich vollständig wegkürzen. Man erhält Erläut. 1

$25 \cdot 83 \cdot 62 \cdot 247 \cdot 246 = 7.817.031.300$ Rechn. 1

3. $\sum_{k=0}^{16} \binom{6+k}{k} = \binom{6}{0} + \binom{7}{1} + \binom{8}{2} + \cdots + \binom{21}{15} + \binom{22}{16}$

Skizze



Der Stiel beginnt links oben bei $\binom{6}{0}$ und läuft bis in Zeile $n = 22$. Er hat $L = 17$ Elemente.

Das Ergebnis steht in der „Kelle" bei $\binom{23}{16}$. Rechnung $\binom{23}{16} = \dfrac{23!}{16!\,7!}$

Rechner: $nCr(23, 16) = 245.157$ Beschreib. 2

Rechnung 1

4. a. Als Lehrerin mit Überblick machen Sie einen allgemeinen, algebraischen Ansatz mit a und b in den Lücken.

$a+3b+54$

$a+2b+13 \quad b+41$

$a+b \quad b+13 \quad 28$

$a \quad b \quad 13 \quad 15$

Zahl an der Spitze:

$a + 3b + 54 = 77$

$a + 3b = 23$

Lösung durch systematisches Probieren

a	2 $\xrightarrow{+3}$ 5	8	
b	7 $\xrightarrow{-1}$ 6	5	$\to$ keine Lösungen, da dann nicht $a<b$ gilt

Also gibt es nur zwei Lösungen.

			77				
		29		48			
	9		20		28		
2		7		13		15	

			77				
		30		47			
	11		19		28		
5		6		13		15	

3

b. Der Ansatz $a+3b+54=77$ ist eindeutig, d.h. andere Lösungsansätze sind nicht möglich. Die Suche nach den Lösungen für $a+3b=23$ ist systematisch. Für a kann man nicht unter 2 gehen, da dann die möglichen Zahlen negativ werden. Man kann nicht über 5 gehen, da dann die Bedingung $a<b$ nicht erfüllt ist.

2

5. a. Tabelle Übung 4. Aufg 6 $f_{15}=610$ 1

b. Vorlesung: Start bei $\binom{n}{0} \to f_{n+1}$

Skript: Für f_n muss man bei $\binom{n-1}{0}$ starten

Also: Für f_{15} Start bei $\binom{14}{0}$ 1

c. $\binom{14}{0}+\binom{13}{1}+\binom{12}{2}+\cdots$ 1

d. Die Summe beider Zahlen ist immer 14.

Also endet man bei $\binom{7}{7}$ 1

6. a. $n = 6 \quad \sum_{k=0}^{6} (-1)^k \binom{6}{k}$

$= (-1)^0 \binom{6}{0} + (-1)^1 \binom{6}{1} + (-1)^2 \binom{6}{2} + \ldots + (-1)^6 \binom{6}{6}$

$= +1 - 6 + 15 - 20 + 15 - 6 + 1$

$= 32 - 32 = 0$ stimmt! 1

b. Man rechnet die Zahlen einer beliebigen Zeile des Pascalschen Dreiecks mit wechselndem Vorzeichen zusammen. Dann ist die Summe der positiv zählenden Zahlen so groß wie die Summe der negativ zählenden, so dass insgesamt 0 herauskommt. 1

c. $(a+b)^6 = \binom{6}{0} a^6 + \binom{6}{1} a^5 b + \binom{6}{2} a^4 b^2 + \binom{6}{3} a^3 b^3$

$+ \binom{6}{4} a^2 b^4 + \binom{6}{5} a b^5 + \binom{6}{6} b^6$ 1

d $a = 1 \quad b = -1$

$(a+b)^6 = 0^6 = 0 = \binom{6}{0} \cdot 1 + \binom{6}{1} 1 \cdot (-1) + \binom{6}{2} \cdot 1 \cdot (-1)^2$

$+ \binom{6}{3} \cdot 1 \cdot (-1)^3 + \binom{6}{4} \cdot 1 \cdot (-1)^4 + \binom{6}{5} \cdot 1 \cdot (-1)^5$

$+ \binom{6}{6} \cdot 1 \cdot (-1)^6$

was genau die Entwicklung in a. ist. 1

e. Nach dem Binomischen Lehrsatz ist

$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \ldots + \binom{n}{n} b^n$

Setzt man $a = 1$ und $b = -1$, so erhält man links $(1-1)^n = 0^n = 0$ und rechts die Summe $\binom{n}{0} + \binom{n}{1}(-1) + \binom{n}{2}(-1)^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}(-1)^{n-1} + \binom{n}{n}(-1)^n$

Die Faktoren (-1), $(-1)^2$, $(-1)^3$, ... sind immer abwechselnd $+1$ (Exponent gerade) und -1 (Exponent ungerade). Die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{0}$ bis $\binom{n}{n}$ sind alle Zahlen in Zeile n des Pascalschen Dreiecks. 2

A2	A3	A4	A5	A6	Σ
2	3	5	4	6	20